Kopf und Zahl

JOURNAL
des **Vereins für Lerntherapie und Dyskalkulie e.V.**
in Zusammenarbeit mit den **Mathematischen Instituten zur Behandlung der Rechenschwäche**

1. Sonderheft zum Thema Division, Herbst 2022
www.dyskalkulie.de

Die Division, das unbekannte Wesen (Teil 1)

Christiane Graefen,
Institut zur Behandlung der Rechenschwäche, München

„Das mit den 2 Punkten“

Inhalt Teil 1:

1. Welche Schwierigkeiten beinhaltet die Division?
2. Die beiden Fragestellungen der Division (Grundvorstellungen des Verteilens und des Aufteilens)
3. Welche Operationsvorstellung sollten Schüler entwickeln?
4. Bewegungsgesetze der Division

1. Welche Schwierigkeiten beinhaltet die Division?

Allgemein gilt die Division als die schwierigste der 4 Grundrechenarten. Woran liegt das? Ihre mathematische Definition lautet: Die Division ist die Umkehrung der Multiplikation. Diese Definition ist so kurz wie unzureichend, denn sie erklärt nicht, dass es Teilaufgaben mit Rest gibt. Aus der Multiplikation lassen sich schließlich nur solche Geteilt-Aufgaben ableiten, die auch „aufgehen.“ Außerdem erwähnt die Definition nicht, dass dieser Rechenart zwei recht unterschiedliche Grundvorstellungen zu Grunde liegen.

Auch für die Schüler, die ab der 2. Klasse mit der Division konfrontiert werden, reicht die alleinige Ableitung des Teilens aus der Multiplikation („Bilde die Umkehraufgabe!“) nicht aus.

Zum Lösen von Geteilt-Aufgaben suchen manche Schüler lange und umständlich in der auswendig gelernten 1x1-Reihe, um die richtige Aufgabe aufzufinden, aus der sie dann die Umkehraufgabe bilden können. So wird die Teilungsoperation gedanklich gar nicht vollzogen, sondern wie in einem Suchspiel wird nur die 1x1-Reihe durchkämmt.

Oft bleibt von dem Zusammenhang zwischen Multiplikation und Division beim Schüler nur nebulös haften, dass man „irgendwie die Malaufgabe umdrehen“ müsse. So wird z. B. die Reihenfolge der Zahlen vertauscht (2 : 8 = 4), in der Meinung, das Vertauschungsgesetz gelte auch hier. Auf die Idee kommt man nur, wenn man Eins-durch-Eins-Reihen auswendig lernt (wie ein Gedicht) ohne Mengenbezüge, ohne Verständnis, welche Zahl geteilt wird, welche der Teiler ist, und was überhaupt „Teilen“ bedeutet.

Die Erklärung des Teilens bedarf also eines höheren Aufwandes, sonst werden die Schüler spätestens bei den Sachaufgaben Verständnisprobleme haben.

2. Die beiden Fragestellungen der Division

Die Division beantwortet zwei unterschiedliche Fragestellungen, nämlich:

1. Wie groß ist eine Teilmenge? und 2. Wie viele Teilmengen sind es?

Zu 1.: Bei einer gegebenen Ausgangsmenge kann man die Frage stellen:

Wie groß ist eine Teilmenge, wenn die Anzahl der Teilmengen bestimmt ist?

Inhalt

Die Division, das unbekannte Wesen (Teil 1) . 1
Die Division, das unbekannte Wesen (Teil 2) . 6
Die Division, das unbekannte Wesen (Teil 3) . 9
Die schriftliche Division (Teil 4). 11
Impressum 15

Ein Beispiel mit Größen: 24 € : 3 = 8 €

Als Rechengeschichte: Oma bringt ihren 3 Enkeln 24 € mit, die diese gleich teilen. Jedes Kind bekommt 8 €.

Hier wird der Dividend (24 €) auf 3 Teilgruppen verteilt, der Quotient (8 €) gibt hier an, wie groß die einzelne Teilgruppe ist und ist deswegen mit der gleichen Einheit wie der Dividend versehen. Dies entspricht der „Grundvorstellung" (Fn1) des Verteilens.

Auf erhöhter Abstraktionsstufe lautet dieser Aspekt: Wie groß ist der soundsovielte Teil? Im Beispiel: „Wie heißt der dritte Teil von 24 €?"

Zu 2.: *Wie viele gleich große Teilmengen ergeben sich*, wenn die Größe einer Teilmenge vorgeschrieben ist?

Bsp. mit Größen: 24 € : 8 € = 3

Als Rechengeschichte: Wenn 24 € auf mehrere Sparschweine so aufgeteilt werden, dass in jedes Sparschwein 8 € kommen, beantwortet die Rechnung, wie viele Sparschweine gefüllt werden können.

Hier wird der Dividend in 8 €-große Teilgruppen geteilt. Das Ergebnis gibt die Anzahl der Teilgruppen an (hier 3). Dieses Ergebnis ist deshalb eine reine Zahl ohne Einheit (wie viele Teilgruppen entstehen? 3). Diese Fragestellung entspricht der „Grundvorstellung" des „Aufteilens".

Auf erhöhter Abstraktionsstufe findet sich diese Vorstellung als „Enthaltensein" wieder: Wie oft ist die eine Größe in der anderen enthalten? Im Beispiel: Wie oft sind 8 € in 24 € enthalten?

Diese Fragestellung wird auch bei der schriftlichen Division ab der 4. Klasse benutzt.

Die Fragestellung 1 (hier in der Version: „Wie viel bekommt jedes Kind?"), das Verteilen, ist vielen Kindern aus ihrer Erfahrung schon bekannt (3 Kinder teilen sich 24 Bonbons). Die mathematische Vorgabe ist, dass jede der Teilgruppen gleich groß sein muss (die Vorstellung des „gerechten" Teilens als moralische Kategorie ist hier fehl am Platze).

Die zweite Fragestellung, die des Aufteilens, kann von den Schülern mithilfe der mehrfachen Addition oder Subtraktion erschlossen werden: Wie oft kann ich 8 € zusammen zählen, um 24 € zu erhalten, oder: Wie oft kann ich von 24 € den Betrag 8 € wegnehmen?

Aufteil-Aufgaben sind am Zahlenstrahl leichter darzustellen. Eine Strecke von 45 cm kann besser in Strecken zu je 9 cm unterteilt werden, als dass aus ihr 9 gleich lange Teilstrecken gebildet werden. Da müsste man schon vorher wissen, wie lang eine Teilstrecke werden soll.

Die in der Literatur (und auch hier im Text) häufig verwendete Benennung des besprochenen Unterschieds als „Verteilen" und „Aufteilen" ist etwas problematisch, schon weil es so schwer zu behalten ist, welches der Worte wofür steht. Im Alltagsgebrauch der Sprache kann man nämlich ebenso gut sagen: „4 Tafeln Schokolade werden an 2 Kinder verteilt", wie: „4 Tafeln Schokolade werden an 2 Kinder aufgeteilt." Wenn schon Erwachsene diese Wortwahl wie Vokabeln auswendig zu lernen versuchen (wenn sie es denn tun), sollte man diese Wortklauberei den Schülern jedenfalls nicht zumuten.

Wichtig und anzustreben ist jedoch, dass auch die Schüler den Unterschied der beiden Fragestellungen verstehen. Da dieser nur bei benannten Größen zu Tage tritt, empfiehlt es sich, die Division auch mit solchen einzuführen. Sollen die Schüler etwa 12 Würfel in 3 Gruppen aufteilen, sollte an der Tafel nicht nur „12 : 3" stehen, sondern „12 W : 3 = 4 W".

Teilziel sollte sein, dass die Schüler lernen, dass folgende Aufgaben auf jeden Fall ***falsch*** sein müssen:

12 km : 3 = 4

12 km : 3 km = 4 km

12 : 3 km = 4 usw.

Die benannte Größe muss Teil des Dividenden sein, sie gibt an, dass – hier – eine Strecke zu teilen ist. Sie kann dann beim Teiler oder beim Ergebnis auftauchen, nie aber bei beiden gleichzeitig.

Umsetzungsvorschläge für den Unterricht: Größe einer Teilgruppe oder Anzahl der Teilgruppen

a) Gegeben ist die Größe einer Teilmenge.

Eine Gruppe von 12 Schülern stellt sich vor den Rest der Klasse.

Die Schüler sollen 6er-Gruppen bilden. Die anderen Kinder formulieren dann die Rechnung:

12 Schüler : 6 Schüler = 2.

Die Übung wird für andere Gruppenstärken wiederholt (2er, 3er- und 4er-Gruppen).

b) Gegeben ist die Anzahl der Gruppen.

Die 12 Schüler sollen sich links und rechts von der Tafel hinstellen, beide Gruppen sollen gleich groß sein.

Wieder bildet die Klasse die Rechnung:

12 Schüler : 2 = 6 Schüler.

Was ist der Unterschied zu Aufgabe a)?

Die beiden Aspekte beim Kopfrechnen

In Sachaufgaben ist die Zuordnung zur Fragestellung „Größe einer Teilmenge" oder „Anzahl der Teilmengen" (Ver- oder Aufteilen) eindeutig, da Größen verwendet werden. Ist die Aufgabe ohne Größen und Kontext gestellt (formale Aufgabe), gibt es jedoch kei-

©Kopf und Zahl, 1. Sonderheft zum Thema Division

nen Hinweis auf die beiden verschiedenen Arten der Interpretation.

12 : 2 = 6 z. B. verrät nicht, ob hier die 12 in 2 Hälften geteilt wird, oder ob die 12 in Teilmengen à 2 geteilt werden soll.

Die reine Rechenaufgabe kann immer auf 2 Arten gerechnet werden, nämlich „verteilnah“ oder aufteilnah“.[2)]

Bsp.: 60 : 4

60 : 4 = ( ) + ( ) + ( ) + ( ) verteilnah: Wie heißt der 4. Teil von 60? Könnte z. B. durch zweimaliges Halbieren gelöst werden.

60 : 4 = 4 + 4 ...+ 4 aufteilnah: Wie viele Vierer stecken in 60? Oder: Wie oft kann man 4 von 60 wegnehmen? Rechenweg z. B.: In 40 stecken 10 Vierer und in 20 stecken 5 Vierer.

Da beide Zugänge möglich sind, stellt sich die Frage, wie und warum wir uns für eine der beiden Methoden entscheiden. Dafür ist bei Sachaufgaben der **Kontext** der Aufgabenstellung bestimmend. Ist die Größe einer Teilgruppe gegeben und die Anzahl der Teilgruppen gesucht, dann rechnet man meist auch aufteilend. Bsp.: „36 Äpfel werden in Tüten zu je 4 Äpfeln verpackt. Wie viele Tüten sind das?“

Wie oft ist die Menge 4 Äpfel enthalten in der Menge 36 Äpfel? (Aufteilen)

Hingegen ist die Vorstellung des Verteilens angesprochen in der Aufgabe „36 Äpfel sollen auf 4 Tüten verteilt werden. Wie viele Äpfel sind in einer Tüte?“ Wie groß ist eine Teilmenge, wenn 36 Äpfel in vier gleich große Portionen geteilt werden? (Verteilen) Die **Größe von Dividend und Divisor** können einen Einfluss darauf haben, ob eher aufteilendes oder eher verteilendes Rechnen naheliegt 2). Ist der Größenunterschied von Dividend und Divisor relativ groß, etwa bei der Aufgabe 60:4, ist es einfacher zu überlegen, welches der 4. Teil von 60 ist, als sich zu überlegen, wie oft die 4 in die 60 passt. Anders verhält es sich, wenn der Größenunterschied von Dividend und Divisor verhältnismäßig gering ist wie bei der Aufgabe 200:50. Hier erscheint es einfacher, sich zu überlegen, wie oft die 50 in die 200 passt, also aufteilend vorzugehen, als sich zu überlegen, welches der 50. Teil von 200 ist, was einer verteilenden Vorstellung entspricht.

Oben zitierte Untersuchung zieht folgende Schlussfolgerung:

„Geübte Rechner entscheiden sich automatisch unter Beachtung beider Aspekte - des Kontextes der Aufgabe sowie der Zahlenwerte - welche Grundvorstellung angewandt werden soll, ohne sich dies bewusst zu machen. Es ist vielmehr eine intuitive Wahl. Daher sollte Kindern im Unterricht der Unterschied zwischen Aufteilen und Verteilen nicht beigebracht oder verdeutlicht werden. Vielmehr sollte die Lehrperson wissen, dass spezifische Aufgaben unterschiedliche Vorstellungen ansprechen.“ [3)]

3. Welche Operationsvorstellung sollten Schüler entwickeln?

Über die beiden Aspekte der Division hinaus sollten die Schüler wissen, dass das **Teilen** ein ***Spezialfall des Zerlegens*** ist. Die Zahl 24 könnte auf vielerlei Arten zerlegt werden (z. B. 24 = 17 + 3 + 4); nur wenn die entstehenden Bündel oder Teilmengen gleich groß sind, handelt es sich um Teilen im Sinne der Mathematik.

Die Phase der handelnden Durchführung mit Material darf nicht zu kurz sein. Die Schüler sollten dabei erfahren, dass die (formale) Aufgabe 12 : 3 mit Material auf 2 Arten gelegt werden kann: Aufteilung in *drei* Gruppen (je 4 groß) oder in Gruppen zu je drei Elementen (4 Gruppen). Die Aufgabe selbst gibt keine Auskunft darüber.

Dass beides nicht einfach gleich ist, kann klar werden, wenn die Aufforderung lautet: „Teilt 12 in 3 Gruppen“ (das würde dem Verteilen entsprechen) und anschließend: „Teilt 12 in Gruppen mit je 3 Elementen“, was dem Aufteilen entspricht).

Ganz bestimmt falsch aber ist eine solche Darstellung, wie sie uns häufig in der Dyskalkulie-Testung begegnet:

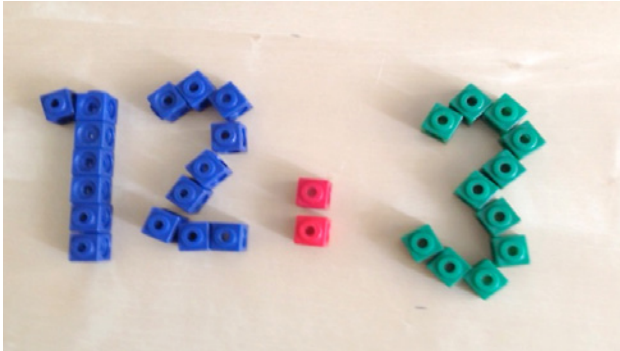


Abbildung 1: Falsch: die Ziffern „nachgeschrieben“

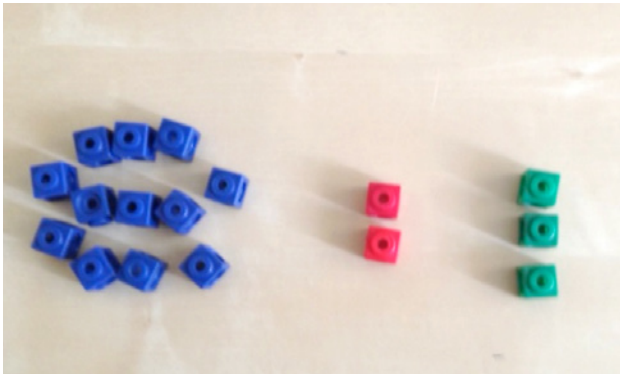


Abbildung 2: Auch nicht besser

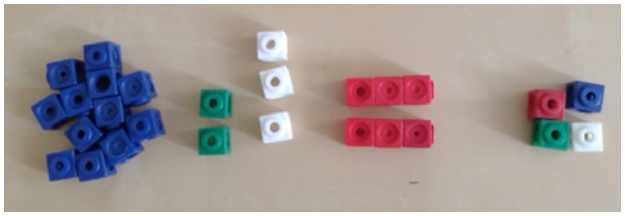


Abbildung 3: 12 : 3 = 4 mit Würfeln nachgestellt

In allen Fällen malen die Schüler mit Würfeln die geschriebene Aufgabe nach, stellen aber nicht den Teilungsakt einer Menge dar.

Ein weiteres Teilziel des Unterrichts sollte also sein, dass alle Schüler eine Divisionsaufgabe korrekt mit Material legen können. Das Teilen liegt genau genommen in der Handlung, die ungeordnete Ausgangsmenge (a) in gleich große Teilmengen zu zerlegen (b).

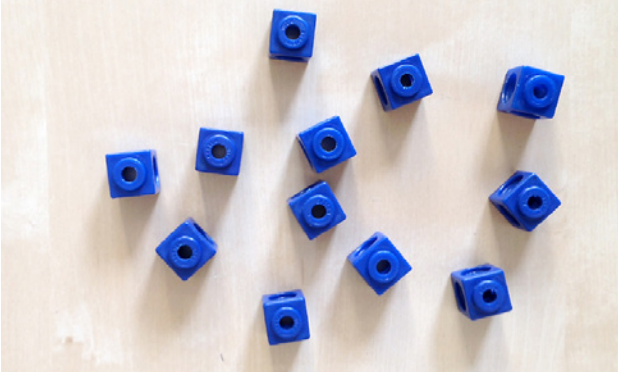


Abbildung 4: a) Ausgangsmenge ungebündelt

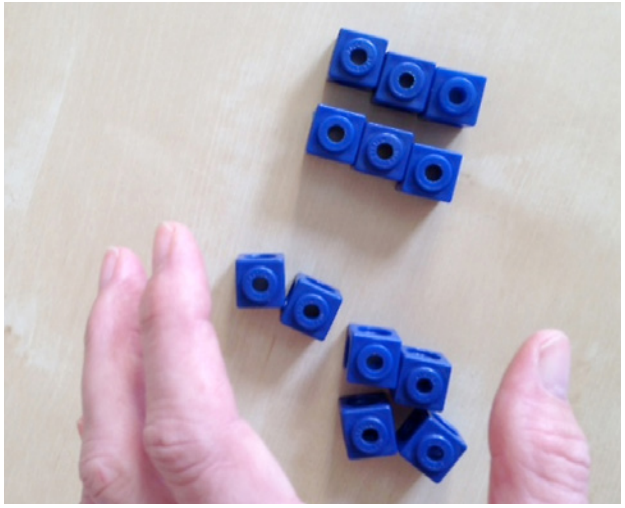


Abbildung 5: b) Handlung des Bündelns

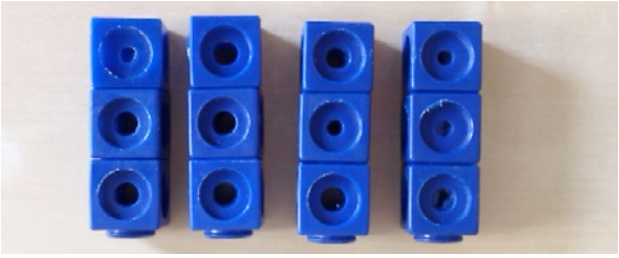


Abbildung 6: Richtig: Vier Dreier

Abbildung 7: Auch richtig: 3 Vierer

Verwechslung mit der Subtraktion

Eine falsche Vorstellung sollte thematisiert werden. In der Aufgabe 24 € : 3 = 8 € wird im Ergebnis nur die Größe *einer* Teilmenge ausgedrückt. Die beiden anderen Teilmengen sind ausgeblendet. Dies erweckt bei manchen Schülern den Eindruck, dass auch beim Teilen etwas kleiner wird, etwas weggenommen wird, genau wie bei der Subtraktion. Beim Teilen wird die Ausgangsmenge nur gebündelt, es werden keine Teilmengen von ihr weggenommen.

Umsetzungsvorschläge für den Unterricht: Unterschied zur Subtraktion

Die Schüler sollen beide Operationen jeweils zweimal hintereinander durchführen:

40 - 2 - 2 = 36	100 - 10 - 10 = 80
40 : 2 : 2 = 10	100 : 10 : 10 = 1

Je größer hierbei Dividend und Divisor gewählt werden, desto eindrücklicher wird der Größenunterschied der Ergebniszahlen.

So viel zu den Grundvorstellungen der Division. Für ein tieferes Verständnis sollten im Weiteren auch die logischen Bezüge zwischen Dividend, Divisor und Quotient (natürlich ohne Verwendung der lateinischen Namen) thematisiert werden.

4. Bewegungsgesetze der Division

a) Je größer der Teiler, desto kleiner das Ergebnis

Die zu teilende Ausgangsmenge unverändert gesetzt, ändert sich der Quotient umgekehrt zur Veränderung des Divisors: Je kleiner der eine, desto größer der andere. Aus der Lebenswirklichkeit der Schüler lassen sich hierzu Beispiele finden (In kinderreichen Familien bekommt jedes Kind weniger...)

©Kopf und Zahl, 1. Sonderheft zum Thema Division

Umsetzungsvorschläge für den Unterricht:

Zur Verdeutlichung kann auch eine Rechenkette mit gleichem Dividenden mit Sachsituationen dargeboten werden:

30 € : 2	Die Zwillinge Erika und Eva bekommen zusammen 30 € Taschengeld. Wie viel Taschengeld bekommt jedes Mädchen?
30 € : 3	3 Kinder haben im Garten geholfen und bekommen zur Belohnung 30 €. Sie teilen zu gleichen Teilen. Wie viel erhält jedes Kind?
30 € : 5	Fünf Freunde teilen sich gleichmäßig 30 €. Wie viel Geld hat jeder?
30 € : 6	Sechs Geschwister bekommen von der Tante 30 € geschenkt. Wie viel Geld hat dann jeder, wenn alle gleich viel bekommen?
30 € : 10	30 € werden zu gleichen Teilen an 10 Kinder verteilt. Wie viel bekommt jedes Kind?

Fülle aus: Der Teiler wird _____, das

Ergebnis wird immer _____.

b) Je größer die zu teilende Zahl, desto größer das Ergebnis bei gleichem Teiler

Je mehr es zu verteilen gibt, desto mehr Teilgruppen ergeben sich, bzw. desto größer wird die einzelne Teilmenge.

Umsetzungsvorschläge für den Unterricht:

Das Verhältnis zwischen Dividend und Quotient bei gleichem Teiler begreifen: Eine Rechenkette mit gleichem Teiler wird in Sachsituationen dargeboten:

18 Eier : 6 Eier	In einem kleinen Lebensmittelgeschäft werden 18 Eier in 6er-Kartons verpackt. Wie viele Kartons ergibt das?
42 Eier : 6 Eier	Im Milchladen werden 42 Eier auf 6er-Packungen verteilt.

Wie viele Packungen sind das?

Ohne zu rechnen: Wenn der Supermarkt 240 Eier geliefert bekommt, wird er mehr oder weniger 6er-Kartons haben als der Milchladen?

Geeignete Aufgaben, bei denen die Schüler nach Möglichkeit **nicht** rechnen sollten:

Setze das richtige Vergleichszeichen ein!

12 : 2	◯	**12 : 4**
18 : 2	◯	**18 : 3**
20 : 10	◯	**20 : 5**
16 : 4	◯	**16 : 8**
24 : 8	◯	**24 : 6**
30 : 2	◯	**30 : 10**

c) Quotientengleichheit durch gleichförmige Veränderung

Werden die zu teilende Zahl und der Teiler in derselben Weise multipliziert oder dividiert, bleibt das Ergebnis, der Quotient, gleich.

Bsp.: 9 : 3 = 3 18 : 6 = 3 36 : 12 = 3 usw.

Hier wurden Dividend und Divisor immer verdoppelt, der Quotient bleibt gleich.

Die Schüler können sich die Logik dieses Verhältnisses so erklären: Es gibt zwar mehr zu verteilen (1. Zahl ist größer geworden), aber - im gleichen Maß - auch mehr Portionen, auf die verteilt wird. So bleibt jede Portion (Teilgruppe) gleich groß.

Die Schüler sollen versuchen, die gleichförmige Veränderung von Dividend und Divisor durch eigene Beispiele selbst anzuwenden, indem sie „große Zahlen“ verkleinern. Dann haben sie auch gleich den Nutzeffekt, dass die Aufgabe übersichtlicher wird.

Bsp.: 2 400 : 1 200 = 2 400 : 200 = 2 4 : 2 = 2

Hier wurden Dividend und Divisor zunächst durch 6, danach durch 100 dividiert.

Dieses Verhältnis liegt dem späteren Kürzen und Erweitern von Brüchen zu Grunde und sollte Schülern schon in der Grundschule vertraut sein. Denn es ist auch die Grundlage des von vielen praktizierten „Nullen-Streichens“ beim Dividieren von „großen“ Zahlen, von dem in Teil II dieses Artikels noch die Rede sein soll.

Fn[1]) Padberg, F., Didaktik der Arithmetik, 3.A. 2005, München, S. 141 ff.

Fn[2]) (Die Wortwahl wurde hier übernommen von Kira Grundvorstellungen der Division – Aufteilen und Verteilen, Internetauftritt UniDortmund)

Fn[3]) (vgl. Spiegel, H. & Fromm, A, Eigene Wege beim Dividieren, Bericht über eine Untersuchung zu Beginn des 3. Schuljahrs, Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Bd. 23 Wien 1996)

Weitere Umsetzungsvorschläge für den Unterricht von den gleichen Autoren finden Sie in „Mathe-Fitness“, herausgegeben vom Domino-Verlag.

Die Division, das unbekannte Wesen (Teil 2)

„Das mit den 2 Punkten“

Christiane Graefen,
Institut z. Behandlung der Rechenschwäche München

Inhalt Teil 2:

5. Kopfrechnen: Schließendes Rechnen auch in der Division
6. Teilen von Zehner- und anderen Stufenzahlen

5. Schließendes Rechnen auch in der Division

Wenn der geplagte Schüler im Dyskalkulie-Test endlich bei den Divisionsaufgaben ankommt, verzieht sich sein Gesicht fast immer, als ob ihm etwas weh täte: „Geteilt! Das kann ich *gar* nicht!“

Schüler, die bei der Aufgabe 56 : 7 das Siebener-Einmaleins (1 • 7 = 7, 2 • 7 = 14...) so weit aufsagen, bis die „56“ endlich als Ergebnis der Malaufgabe kommt, aus welcher sie dann die Ergebniszahl der gefragten Geteilt-Aufgabe herausextrahieren können: diese Schüler kommen selten, und schon gar nicht in der gewünschten Zeit, zum Ziel. Ihr Rechenweg ist zu anstrengend und erfordert zu viele umständliche Schritte. Außerdem lernen sie so nichts für andere Aufgaben, denn sie müssen ja immer wieder von vorn beginnen.

Aber auch für nicht rechenschwache Schüler wäre ein verständiger Umgang mit der schwierigsten Grundrechenart wünschenswert. Allzu häufig wird hier geraten und gehofft, dass es stimmen möge.

Zu den Problemen des Kopfrechnens im kleinen Einsdurcheins gesellen sich verschärfend noch Aufgaben über „10 Mal“. 108 : 9 kann man - laut Auskunft vieler Schüler - überhaupt nur <u>schriftlich</u> rechnen. Der Versuch des Kopfrechnens scheitert daran, dass das gemütliche Zerlegen in die Stellenwerte hier nicht klappt. 100:9 und 8:9 macht die Sache noch schlimmer. Denn es wäre hier eine intelligente Zerlegung des Dividenden in <u>durch diesen Teiler</u> teilbare Summanden erforderlich.

Kopfrechnen, das die in der Division geltenden Rechengesetze anwendet, um vorteilhaft zu rechnen, legt nicht nur die Grundlage für den „Durchblick“ bei den einzelnen Einsdurcheins-Reihen, sondern auch für den Stoff kommender Schuljahre (Bruchrechnen, Proportionalität etc.).

Anstrebenswert ist also neben der korrekten Operationsvorstellung, dass die Schüler beim Rechnen und v. a. Kopfrechnen auf eine verlässliche **Struktur** zurückgreifen können.

Unterricht (und Therapie) sollte für das Teilen - wie für die anderen Grundrechenarten auch - Methoden des Kopfrechnens anbieten, die es den Schülern erlauben, sich a) an bekannten Aufgaben zu orientieren und b) sich die Bewegungsgesetze der Division (s. Artikel in K&Z Nr. 19) zunutze zu machen. Bei den *Wenn-dann*-Sätzen des schließenden Rechnens liegt das Ziel nicht nur darin, Zeit zu sparen, sondern vor allem darin, durch das Rechnen selbst die Größenvorstellung zu befördern.

5.1. Orientierung an Stützpunktaufgaben

Bei der Multiplikation ist mittlerweile Standard in den meisten Schulbüchern, was in der Dyskalkulie-Therapie von jeher getan wurde: Ausgehend von den „Kernaufgaben“: 2 mal, 5 mal und 10 mal die Zahl, werden die anderen Aufgaben der Einmaleins-Reihe abgeleitet. *Wenn* 5 mal 7 = 35, *dann* ist 6 mal 7 ein Siebener mehr, also 42.

In Umkehrung dieser Stützpunktaufgaben der Multiplikation kann mit den Schülern jede Einsdurcheins-Reihe erarbeitet werden.

Im Beispiel sind die Aufgaben 10 mal die Zahl, 5 mal die Zahl und 2 mal die Zahl als Stützpunkte gewählt. (Es kann auch 1 mal die Zahl genommen werden.)

Am Beispiel der 7er-Reihe:

<u>70 : 7 = 10.</u>

63 : 7 ist ein Siebener weniger, also _____

56 : _____

42 : 7 ist ein Siebener mehr, also _____

<u>35 : 7 = 5</u>

28 : 7 ist ein Siebener _____, also _____

21 : _____ _____

<u>14 : 7 = 2</u>

7 : 7 = ___

Übung:
Auf diese Art können auch sog. **Nachbaraufgaben** *gezielt geübt werden. Vorgegeben wird eine fertige Divisionsaufgabe. 45 : 9 = 5. Die (von den Schülern zu bildenden) Nachbaraufgaben im 9er-Einsdurcheins lauten: 54 : 9 = 6 und 36 : 9 = 4. Das Schwierigste daran ist, den jeweiligen Dividenden zu finden. Es ist aber auch eine Übung zur Struktursicherheit: In welcher Reihe bin ich, und wie lautet die Reihenfolge der Zahlen (nämlich nicht 9 : 45...)?*

©Kopf und Zahl, 1. Sonderheft zum Thema Division

Zwar können sich die Schüler auf diese Art selbst die einzelnen Reihen erschließen, es ist jedoch nicht daran gedacht, sie das kleine Einsdurcheins auswendig lernen zu lassen. Dies ist weder üblich noch sinnvoll. Es geht vielmehr darum, dass sie die Zusammenhänge selbst herstellen müssen.[*1]

5.2. Benutzung der Bewegungsgesetze in der Division

Mindestens so wichtig wie das genaue Ausrechnen von Ergebniszahlen ist das vorausschauende, das vergleichende und abschätzende „Prognostizieren" der Ergebnisse. Die Schüler können sich mit Hilfe von Wissen über die Division den jeweiligen Zahlenraum dividierend erschließen:

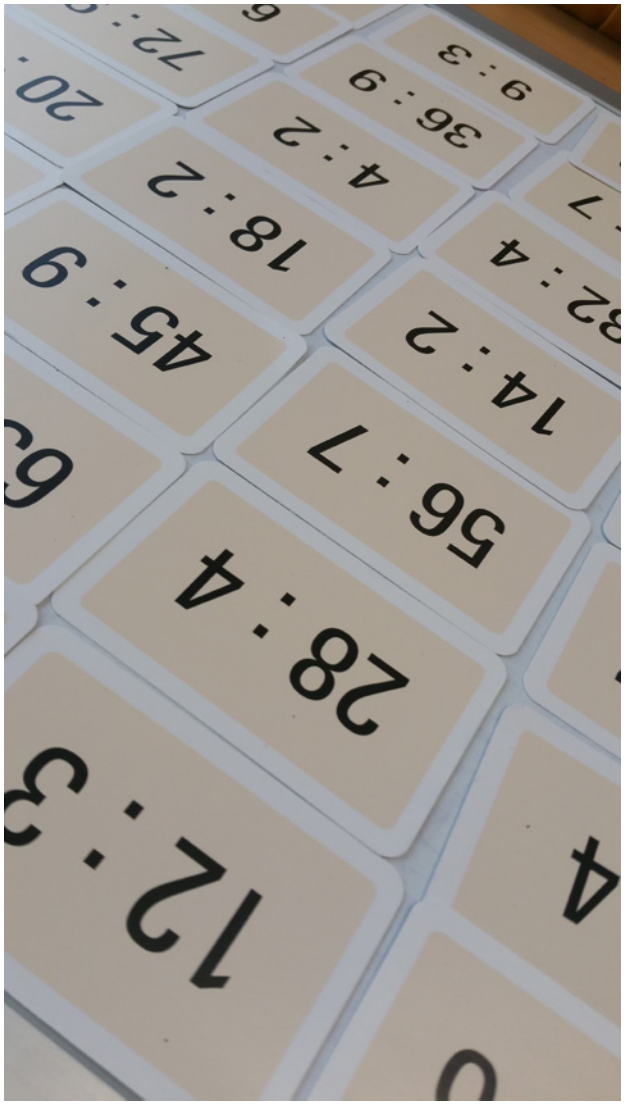
- Wenn die Schüler wissen, dass (bei gleichem Dividenden) <u>je größer der Teiler, desto kleiner das Ergebnis</u> sein muss, haben sie für die Größenabschätzung einen wichtigen Meilenstein.
- Ebenso hilfreich ist die Erkenntnis, dass (bei gleichem Divisor) gilt: Je größer der Dividend, desto größer der Quotient, und umgekehrt.
- Stützpunktaufgaben (wie oben) erlauben, Nachbaraufgaben zu bilden.
- Bei bestimmten Quotienten ist die Aufgabe klar: Kommt 1 heraus, dann waren Dividend und Divisor gleich. Kommt 0 heraus, war der Dividend auch 0. Ist das Ergebnis 10, dann war der Dividend zehnmal so groß wie der Teiler. Usw.

5.2.1 Je größer der Teiler bei gleichem Dividenden, desto kleiner der Quotient.

Wenn das Grundverständnis, dass eine Ausgangsmenge in gleich große Teilmengen zerlegt wird, bei den Schülern vorhanden ist, können sie sich die Beziehung zwischen Anzahl der Teilmengen und ihrer jeweiligen Größe klar machen: Hat die Oma doppelt so viele Enkelkinder, aber gleich viel Geld zum Verteilen, dann bekommt jedes Enkelkind nur die Hälfte etc. Ebenso die Beziehung zwischen Größe einer Teilmenge und Anzahl der Teilmengen: Soll jede einzelne Gruppe größer werden, dann wird die Anzahl der Gruppen kleiner. Werden 40 Orangen jeweils zu acht in Netze verteilt, dann haben wir weniger Netze, als wenn die
40 Orangen in 5er-Netze verpackt würden.

> *Übung:*
> *Teiler doppelt so groß - Ergebnis halb so groß (und umgekehrt)*
> *Löse durch Überlegung:*
>
> *Wenn* $24 : 8 = 3$, *wie groß ist dann* $24 : 4$ *?*
> *Wenn* $18 : 6 = 3$, *dann ist* $18 : 3$ *doppelt so groß, also 6.*

[*1]: Grundlage dieser Art des schließenden Rechnens ist das Distributivgesetz: Der Dividend wird in eine Summe zerlegt, die Summanden werden einzeln dividiert. $(a + b) : c = a : c + b : c$



Das antagonistische Verhältnis zwischen Divisor und Quotient gilt natürlich nicht nur bei „doppelt so groß - halb so groß", sondern bei allen anderen Vervielfachungen. Ist der Divisor nur ein Drittel des Divisors in der Ausgangsaufgabe, dann wird der Quotient dreimal so groß sein.

Wenn $45 : 9 = 5$, *dann ist* $45 : 3$ *wie viel?*

Auf diese Art können die Schüler, wenn sie darauf vertrauen, auch Aufgaben berechnen, die eigentlich einer höheren Klassenstufe vorbehalten sind.

5.2.2 Je größer der Dividend bei gleichem Teiler, desto größer das Ergebnis.

Das ist logisch: Wenn es mehr zu verteilen gibt und die Anzahl der Empfänger bleibt gleich, dann bekommt jeder mehr.

Ist dies dem Schüler klar, kann er folgende Aufgaben „blind", also ohne ein einziges Mal rechnen zu müssen, lösen.

Setze das richtige Vergleichszeichen (>, <, =)

12 : 3	☐	21 : 3	50 : 5	☐	40 : 5
8 : 2	☐	8 : 4	15 : 3	☐	15 : 5

5.2.3. Quotientengleichheit (ab 4. Klasse)

Wenn Dividend und Teiler beide im gleichen Maß (gleicher Faktor) verändert werden, dann bleibt das Ergebnis gleich.

Wenn 500 : 100 = 5, dann ist 250 : 50 ebenfalls 5. (Dividend und Divisor wurden halbiert)

Wenn 42 : 6 = 7, dann ist 84 : 12 auch 7.
(Dividend und Divisor wurden verdoppelt)

Das leuchtet auch Kindern ein: Wenn die Oma, die auf einmal doppelt so viele Enkelkinder hat, auch doppelt so viel Geld zum Verschenken mitbringt, dann bleibt es beim einzelnen Enkel bei der gleichen Geldportion.

Übungen zur Quotientengleichheit
(gleichsinnige Veränderung von Dividend und Divisor)

Grundaufgabe: Geteilt-Aufgaben zu vorgegebenen Ergebnissen finden lassen.
Die Schüler sollen viele Geteilt-Aufgaben mit dem ***Ergebnis 20*** *finden, jeder Schüler am besten mehrere. Hierdurch wird das Verständnis für den Zusammenhang mit der Multiplikation gefördert.*
Aufbauanforderung: Die Therapeutin oder Lehrkraft sucht dann eine der gefundenen Aufgabe heraus, sagen wir:

80 : 4 = 20, *und verdoppelt Dividend und Divisor.*
160 : 8.

Nachdem die Klasse festgestellt hat, dass das Ergebnis gleich ist, sollen die Schüler bei ihren eigenen Aufgaben suchen, ob sie auch „Ableitungen" von 80 : 4 = 20 dabei haben.
(so wie 20 : 1 = 20; 40 : 2 = 20; 800 : 40 = 20 usw.)
Vielleicht werden auch noch andere Aufgabengruppen gefunden (60 : 3 = 20 etc.)
Dann soll auch bei anderen Aufgaben diese Verdoppelung oder die Halbierung durchgeführt werden.

Diese Übung ist für das spätere Kürzen und Erweitern von Brüchen wichtig.

Die Quotientengleichheit liegt auch dem in Punkt 6 zu besprechenden Rechentricks zugrunde: „Streich doch einfach die Nullen!". S.u.

5.3. Quadratzahlen

Auch die Quadratzahlen können als Stützpunktzahlen dienen. Sie sind relativ einfach auswendig zu lernen und erlauben den schließenden Rückgriff auf benachbarte Aufgaben der gleichen Reihe. Z. B. die besonders unbeliebte Aufgabe 56 : 8 lässt sich mit Hilfe der „Quadrataufgabe" 64 : 8 = 8 leichter lösen.

Übung: Nenne die Quadratzahlen bis 100.
Bilde dann selbst Aufgaben wie diese:
9 : 3 = 3 16 : 4 = 4 25 : 5 = 5
Schreibe dann zu jeder gefundenen Aufgabe die beiden Nachbaraufgaben!

Als Gedankenstütze kann die Einmaleinstafel als Hunderterfeld dienen, in der die Quadratzahlen eingetragen werden sollen.

✡	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	✡	6	7	10	12	14	16	18	20
3	6	✡	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	✡	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	✡	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	✡	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	✡	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	✡	79	80
9	18	27	36	45	54	63	72	✡	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	✡

5.4. Die 1 als Quotient

Immer wieder ein Aha-Erlebnis: 5 : 5 und 6 : 6 und 7 : 7 haben das immer gleiche Ergebnis 1. Auch Schüler der 2. Klasse können mit „riesigen" Zahlen rechnen, wenn einmal klar ist, dass 1 herauskommt, wenn Dividend und Divisor gleich groß sind. Der Fehler, zu meinen, 0 sei das Ergebnis, kann gut diskutiert werden: Wenn 3 Kinder sich 3 Hefte teilen, dann sind ja nicht alle Hefte verschwunden... Vielleicht kommen die Schüler ja auch darauf, dass hier eine Verwechslung mit der Subtraktion vorliegt.

6. Teilen von Zehner- und anderen Stufenzahlen

Anzustreben ist auch im Zahlenraum der 3. und folgenden Klassenstufen eine Operationsvorstellung davon, was genau geschieht, wenn eine Zahl durch eine andere dividiert wird. Dieses wird leider häufig dadurch ersetzt, dass die Schüler im kleinen Einsdureins rechnen und für den größeren Zahlenraum Nullstellen anhängen oder streichen, oft ohne den richtigen Begriff davon zu haben, was sie da eigentlich tun. Auch wenn sogar im offiziellen Lehrplan und in der Praxis der Erwachsenen das Streichen von gleich vielen Nullen im Dividenden (zu teilende Zahl) und im Divisor (Teiler) empfohlen wird bzw. gängig ist: Erfahrungsgemäß führt diese Art der (scheinbaren) Erleichterung dazu, dass die Schüler aus Mangel an Ein-

©Kopf und Zahl, 1. Sonderheft zum Thema Division

sicht willkürlich streichen/anhängen. Je weniger Größenvorstellung vorhanden ist, desto eher werden die Regeln mit denen der Multiplikation, bei der Nullen angehängt werden sollen, verwechselt. Und schon kommt bei 240 : 40 das Ergebnis 600 (eine 6 mit zwei angehängten Nullen) heraus.

Oder so:

$$200 : 50 = 40$$

Anwendung des Merksatzes: Nach dem Streichen gleich vieler Nullen hat das Ergebnis so viele Nullen wie die erste Zahl.

Das Streichen von Nullen kann die falsche Vorstellung befördern, dass 0 „nichts“ ist, weshalb man sie ohne langes Überlegen anhängen oder wegstreichen kann.

Unverständnis gegenüber der Bedeutung der Null zeigt sich auch bei Nullen in der Ergebniszahl selbst, wie bei 4 × 5 = 20. Wenn gerechnet werden soll 200 : 4, kann das Ergebnis 500 lauten, denn 20 : 4 = 5, und es werden 2 Nullen angehängt, weil 200 eben zwei Nullen hat.

An diesen Fehlern sieht man, dass das Streichen bzw. Anhängen ohne Kenntnis der Gründe erfolgt. Mathematisch betrachtet wird beim Streichen von Nullen in beiden Zahlen der Divisionsaufgabe ja folgendes gerechnet:

Bsp.:	720	:	80	= □
	(720 : 10)	:	(80 : 10)	= □
	72	:	8	= 9

Dividend und Divisor werden durch die gleiche Zahl geteilt. Der Quotient bleibt gleich. Das wissen aber die wenigsten Schüler.

Die Schüler kommen oft selbst schon mit dem Rechentrick, die Schule sollte ihnen dies nicht auch so beibringen, sondern vielmehr Wert darauf legen, dass die Schüler den „Rechentrick“ auch erklären können.

Manche Leute, die sich schon sehr an die Technik des Nullen-Weglassens gewöhnt haben, fragen: „Wie sonst – wenn nicht mit Nullen-Streichen – soll man denn solche Aufgaben rechnen wie: 3 200 : 80? Beispielsweise mit dem Rückgriff auf die benachbarte Aufgabe 3 200 : 800. Das wäre 4. Die gesuchte Zahl muss also 10 mal so groß sein (s. o.).

Die Schüler sollen also ermuntert werden, bei schweren Aufgaben nicht gleich aufzugeben, sondern zu fragen: Welche ähnliche einfachere Aufgabe kenne ich, die mir helfen kann?

Die Division, das unbekannte Wesen (Teil 3)

Teilen mit Rest

Christiane Graefen,
Institut z. Behandlung der Rechenschwäche München

Inhalt Teil 3:

7. Teilen mit Rest

Manche Schüler glauben, dass sie eine neue Rechenart lernen, wenn in der Schule das Teilen mit Rest eingeführt wird.

Anderen kommt die Sache seltsam vor: eine Rechnung, die gar nicht „fertig“ ist? Das gab es bislang nicht im Mathematikunterricht.

Was genau macht das Teilen mit Rest aus?

In der Grundschule ist die gegebene Zahlenmenge die Menge der natürlichen Zahlen, also der positiven ganzen Zahlen („Zahlen zum Äpfelzählen“). Nicht enthalten in dieser Zahlenmenge sind die negativen und die Bruchzahlen. In der Zahlenmenge N können die Rechenarten Addition und Multiplikation ohne Einschränkungen durchgeführt werden, nicht hingegen die Subtraktion und die Division. Bei der Subtraktion muss die Einschränkung gemacht werden, dass der Subtrahend nicht größer sein darf als der Minuend. Bei der - hier interessierenden - Division müsste die Einschränkung gemacht werden, dass der Dividend ein genaues Vielfaches des Divisors sein muss, wenn die Aufgabe in N lösbar sein soll. Nur wenn die Division „aufgeht“, ist die Aufgabe im Zahlenraum der Natürlichen Zahlen lösbar.

20 : 5 oder 36 : 9 ist in N lösbar.
Aufgaben wie 21 : 5 hingegen nicht.

Man könnte also sagen: In der Grundschule werden nur diejenigen Geteilt-Aufgaben gerechnet, die auch „aufgehen“, die anderen Aufgaben kommen später dran, wenn mit dem Bruchrechnen eine neue Zahlenmenge eröffnet wird. Bekanntlich ist dem nicht so, schon wegen der schriftlichen Division der 4. Klasse, die nichts anderes ist als fortgesetztes Teilen mit Rest, dazu mehr im Kapitel „Schriftliche Division“.

Also werden doch alle Geteilt-Aufgaben ohne Einschränkung zugelassen, wodurch die Schüler damit konfrontiert werden, dass eine Rechnung nicht bis zum Ende durchgeführt werden kann. Schauen wir uns das genauer an, und zwar anhand einer Aufgabe mit benannten Größen, die den Unterschied zwischen der durchgeführten Teilung und dem nicht geteilten Rest darstellt. Bei Aufgaben mit reinen Zahlen wird dieser Unterschied nicht so deutlich.

Aufgabe 1:
265 Fußballfans werden zum Auswärtsspiel ihres Vereins mit Bussen gebracht. In jedem Bus können 60 Fans mitfahren. Wie viele Busse werden eingesetzt?

Rechnung: 265 : 60 = 4 R 25

Im Ergebnis kommen 2 Zahlen vor, die 4 (vor dem Rest) und die 25 (nach dem Rest). Die Bedeutung dieser Zahlen ist völlig verschieden: 4 ist der Quotient, und er besagt hier, dass es ***4 Busse*** sein müssen, während die Zahl 25 eben keine Busse, sondern ***25 Fans*** darstellt. Der Rest (die Fans) sind noch Teil des Dividenden. Wirklich geteilt wurde nur die Zahl 240 Fans, die nunmehr in den Bussen stecken.

Noch ein Beispiel:

Aufgabe 2:
Mehrere Kinder sollen Geschenkschachteln mit je 5 € erhalten. 21 € sind vorhanden.

Wie viele Schachteln ergibt das?

Rechnung: 21 € : 5 € = 4 R 1 €.

Der Quotient 4 steht ohne Einheit, denn er benennt ja die Anzahl der Schachteln. Der Rest 1 € ist als nicht geteilter Rest eine €-Angabe. Daran sieht man, dass der Rest Teil des Dividenden ist. Er wird aber rechts vom Ergebnis notiert. Kein Wunder, wenn einige Schüler glauben, der Rest gehöre „irgendwie" zum Quotienten dazu. Sie haben die Tendenz, den Rest nicht als solchen stehen zu lassen, sondern ihn „weiter zu verarbeiten". Manche zählen ihn zum Quotienten dazu. Dann hätten wir in der Busaufgabe 29 Busse: 265 : 60 = 4 + 25.

In höheren Klassenstufen ist die Versuchung gegeben, Quotient und Rest mit einem Komma zu vereinen, was zu 4,25 Bussen führen würde.

Dieser Verwirrung könnte abgeholfen werden, wenn von vornherein die Schreibweise der schriftlichen Division verwendet würde: Der geteilte Anteil des Dividenden wird abgezogen, der Rest darunter notiert.

265 : 60 = 4
– 240 ⟵ 4 · 60
25 Rest

Dann wäre klar gestellt, dass der Rest zur Ausgangszahl gehört und die Schüler würden sich schon in der dritten Klasse an die Schreibweise gewöhnen, die ansonsten zu den Schwierigkeiten der schriftlichen Division in der 4. Klasse dazukommt.

Dieser Vorschlag ist natürlich kein Allheilmittel gegen alle möglichen Fehler, aber für das Grundverständnis wäre diese Schreibweise hilfreich.

Die Kluft zwischen Mathematik und dem wirklichen Leben

Wenn es in einer Familie mit 5 Mitgliedern einmal 21 Faschingskrapfen zu essen gibt, dann kann man ziemlich sicher sein, dass nach der Mahlzeit nicht genau einer dieser Krapfen übrig bleibt. Selbst wenn alle gleich viele Krapfen essen würden (und nur dann wäre es überhaupt eine Geteilt-Aufgabe), dann würde sicher der letzte Krapfen auch noch einen Abnehmer finden. Insofern ist das Teilen mit Rest unrealistisch.

Und genau dieser Unterschied zum täglichen Leben wird dann seitens der Schule in Sachaufgaben gepackt. Wenn im wirklichen Leben ein Rest vorliegt, dann kommt es darauf an, wie man damit umgeht. Manchmal wird großzügig noch eine 1 beim Quotienten draufgelegt:

Wie viele Busse werden benötigt für die 265 Fans aus Aufgabe 1? Wir hatten gerechnet 265 : 60 = 4 R 25. 4 Busse reichen nicht aus, es muss einer mehr sein, damit kein Fan stehen bleibt.

In anderen Fällen bleibt wirklich etwas übrig: Bei den Geschenkschachteln kann nicht noch ein Kind mehr eine bekommen. Dort bleibt ein Euro übrig.

Die Schüler sollen also nicht bei der rein rechnerisch ermittelten Ergebniszahl stehen bleiben, sondern sie sollen überlegen, wie das praktische Leben mit dem ungeteilten Rest verfahren würde. Eine Leistung, die ein gedankliches Umschalten erfordert und im Unterrichtsgespräch geübt werden könnte.

Selbst überprüfen durch Proberechnung

Wenn das Teilen mit Rest gut verstanden ist, können die Schüler die entsprechende Proberechnung kennen lernen, mit der sie selbst nachprüfen, ob richtig gerechnet wurde. Auch hier empfehlen sich Beispiele mit Einheiten.

27 € : 5 € = 5 R 2 €. „Rückwärts" rechnen bedeutet hier: 5 · 5 € + 2 €

Der Rest muss addiert werden, weil er ja auch zum Quotienten gehört.

Beliebte Fehler

a) „Es wäre noch einmal gegangen"

Wenn ein Schüler 34 : 4 = 7 Rest 6 rechnet, dann wird er in der Regel einen Fehler angeschrieben bekommen, mit dem Argument, er hätte ja noch einmal teilen können. Überprüfen wir die Rechnung mit o. g. Proberechnung. Quotient mal Teiler plus Rest. 4*7+6

©Kopf und Zahl, 1. Sonderheft zum Thema Division

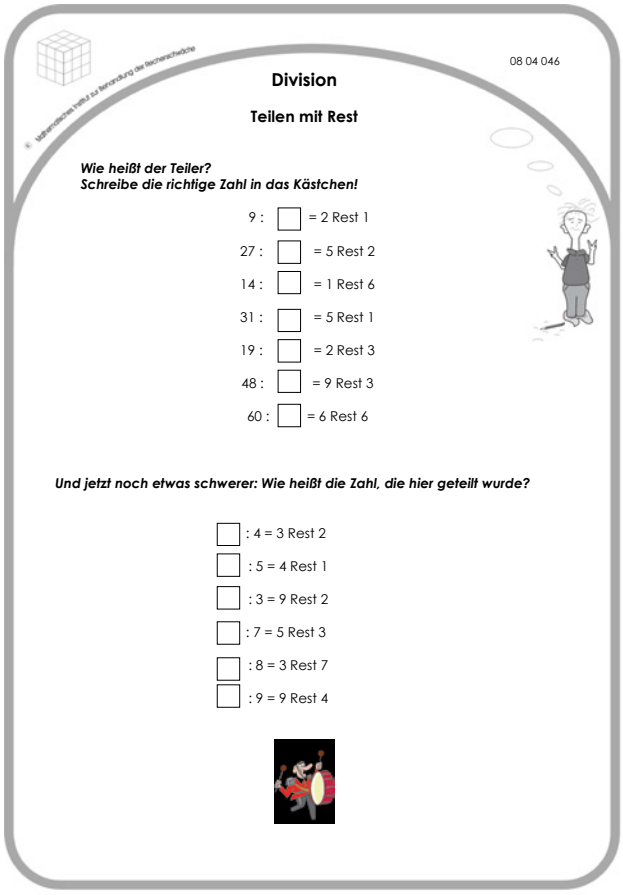
= 34, das stimmt. Im rein mathematischen Sinn ist die Aufgabe also nicht falsch berechnet. Es bedarf also der Übereinkunft, dass so oft wie möglich geteilt werden muss. Denn: Passiert dieser „Fehler“ bei der schriftlichen Division, dann wird der Quotient eine Stelle zu viel haben, (dazu später). Das ist dann natürlich ein Fehler ohne Anführungszeichen.

b) Fehler, zu hoch zu greifen in der Einmaleins-Reihe.

Bsp.: 66 : 8 = 9 Rest 6.

Hier wurde offenbar 72 : 8 = 9 gerechnet, der „Rest“ 6 bezeichnet den Unterschied von 66 und 72. Es wurde aus dem Auge verloren, dass nicht mehr geteilt werden kann, als per Dividend zur Verfügung steht.

Diesen Fehler können die Schüler mit Hilfe der Umkehraufgabe ($9 \cdot 8 + 6 \neq 66$) selbst feststellen, vielleicht kommen sie sogar auf die falsche Überlegung des Rechners.


08 04 046

Division

Teilen mit Rest

Wie heißt der Teiler?
Schreibe die richtige Zahl in das Kästchen!

9 : ☐ = 2 Rest 1
27 : ☐ = 5 Rest 2
14 : ☐ = 1 Rest 6
31 : ☐ = 5 Rest 1
19 : ☐ = 2 Rest 3
48 : ☐ = 9 Rest 3
60 : ☐ = 6 Rest 6

Und jetzt noch etwas schwerer: Wie heißt die Zahl, die hier geteilt wurde?

☐ : 4 = 3 Rest 2
☐ : 5 = 4 Rest 1
☐ : 3 = 9 Rest 2
☐ : 7 = 5 Rest 3
☐ : 8 = 3 Rest 7
☐ : 9 = 9 Rest 4

Übungsvorschlag

Wie groß kann der Rest höchstens sein?

Eine Rechenkette durchdividieren

Die Zahlen von 5 bis 25 werden durch 5 geteilt (5 : 5 = 1. 6 : 5 = 1 Rest 1. 7 : 5 = 1 Rest 2 usw.). Dabei wird festgestellt, dass es viel häufiger vorkommt, dass die Division einen Rest ergibt, als dass sie „aufgeht“. Außerdem kann die Frage beantwortet werden, wie groß der Rest in der 5er-Reihe höchstens sein kann: 4. Vielleicht finden die Schüler noch heraus, welche allgemeine Aussage man über die Größe des Rests treffen kann: Er wird höchstens um 1 kleiner sein als der Teiler. Logisch, denn noch ein Einer mehr, und die Teilmenge ist wieder voll.

Wie heißt der größte Rest im Dreier-Einmaleins?

Wie heißt der größte Rest im Zwölfer-Einmaleins?

Die schriftliche Division (Teil 4)

„Wo muss ich das hinschreiben?“

Christiane Graefen,
Institut z. Behandlung der Rechenschwäche München

Inhalt Teil 4:

8. Schriftliche Division

1. Probleme

„Wo muss ich das hinschreiben?“ ist die häufig von Schülern gestellte Frage, welche die Hilflosigkeit gegenüber einem komplexen formalisierten Verfahren verrät.

- Der Schüler ist irritiert, weil er hier nicht nur horizontal (von links nach rechts), sondern auch vertikal (von oben nach unten) rechnen muss.
- Er versteht nicht, dass er nicht nur teilen soll, sondern auch minus und mal rechnen muss, und vor allem versteht er nicht, warum?
- Er verliert leicht den Überblick und weiß nicht, an welcher Stelle im Ablauf des formalisierten Verfahrens er sich gerade befindet.
- Vor lauter Rechenvorschriften kommt das schriftliche Teilen ihm vor wie eine ganz neue Rechenart. Der Zusammenhang mit dem „normalen“ Teilen (wenn er denn dieses überhaupt beherrscht) ist für ihn nicht erkennbar.
- Im Kampf Ziffer für Ziffer geht die Größenvorstellung verloren. Vor allem, wenn Nullen im Dividenden vorkommen, produzieren die Schüler oft viel zu kleine Ergebniszahlen (denn „Null ist nichts, also schreibe ich nichts hin“).

Aus all dem resultiert die große Unbeliebtheit der schriftlichen Division.

Hier soll versucht werden, durch eine alternative Herangehensweise dem Verfahren etwas von seiner Sperrigkeit zu nehmen.

2. Grundsätzliches

Prinzipiell sollte vermieden werden, das Ordnungsschema der schriftlichen Division als nicht weiter begründbare „Vorschrift“ nahe bringen zu wollen. „Dann musst du das machen und dann das ...“ führt zu nachahmender statt verstehender Rechentechnik. Wichtig hingegen ist der Sinn des schriftlichen Rechnens: Es geht um Aufgaben mit großen Zahlen, die man schlecht im Kopf rechnen kann. Die zerlegen wir in kleinere Aufgaben, die wir schon seit der 3. Klasse rechnen können.

Denn schriftlich teilen ist nichts anderes als eine Abfolge von mehrfachem, nach einander erfolgendem **Teilen mit Rest.** Geteilt wird der Dividend, indem man Stelle für Stelle von ihm dividiert. Für die erforderliche Technik kommt nur noch der **Stellen-Tausch** dazu.

3. Zunächst einstellig

Den Ausgangspunkt bildet die Erklärung zur Schreibweise, wie sie im Artikel „Division“ in Kopf und Zahl 21, Seite 2 vorgeschlagen wurde.

Bsp.: 9 : 2 = 4
− 8 (schon erledigt: 2 • 4)
= 1 Rest *

* (Das Gleichheitszeichen kann später durch den Strich mit gleicher Bedeutung ersetzt werden)

Gerade in einer Aufgabe mit einstelligem Dividenden kann gut gezeigt werden, wie die Schreibweise organisiert ist: Das Ergebnis des Teilens (hier 4) steht wie immer rechts vom Gleichheitszeichen. Das Weiterrechnen findet nach unten hin statt.

4. Der Akt des Tauschens

Sehen wir an einem Beispiel, wie und wo genau der Stellentausch passiert, indem wir den bekannten Akt „die nächste Ziffer herunterschreiben“ in zwei Schritte zerlegen: Bsp.:

450 : 3

Wir beginnen beim größten Stellenwert, der Hunderterstelle:

4 H : 3 = 1 H. Wenn 4-Hundert-€-Scheine auf 3 Personen verteilt werden, bekommt zunächst jeder einen Hunderter*. Es bleibt 1 H übrig, der noch nicht geteilt wurde. Als Hunderter können wir ihn nicht teilen. Was tun? Wir machen den Hunderter klein, indem wir ihn in 10 Zehner tauschen. Das ist doch unsere zweite Chance: Als Hunderter können wir den 1 H nicht mehr teilen, aber die Zehnerstelle ist ja noch dran.

450 : 3 = 1 (für jede Person 1 H)
− 3 H (erledigt)
1**0**

Wir schreiben hinter die 1 (Rest 1 H) eine 0, womit 1 H in 10 Z getauscht ist (das ergibt sich rein durch die Stellenschreibweise). Bevor wir es mit dem Teilen der nunmehr 10 Z noch einmal versuchen, nehmen wir die 5 Z - aus dem ganz praktischen Grund, dass die Zehnerstelle jetzt zum Teilen ansteht - in der Ausgangszahl noch dazu. Jetzt haben wir 15 Z, die wir durch 3 teilen.

450 : 3 = 1 (für jede Person 1 H)
− 3 H (erledigt)
1**5 (10Z + 5Z)**

und jetzt geht es.
Ergibt noch 5 Z für jeden. 450 : 3 = 15...

Dieses Beispiel sollte verdeutlichen, wie elegant das Tauschen des nicht geteilten Rests in den nächst kleineren Stellenwert funktioniert. Wir alle haben es so gelernt, dass sogleich die nächste Ziffer neben die Rest-Ziffer geschrieben wird. Aber rein logisch setzt dies ja schon voraus, dass dort eine zweistellige Zahl - eigentlich - steht. Denn sonst hieße es ja in unserem Beispiel 1 + 5 = 6... Anders gesagt: Die jeweils neu zu teilende Zahl ist eine Kombination (Addition) des *in eine kleinere Stelle getauschten* Rests der vorherigen Teilung und der neuen, noch nicht geteilten Stelle der zu teilenden Zahl. Darauf sollte man Wert legen.

Alle anderen Rechenarten leisten nur Hilfsdienste für diesen einen Hauptgesichtspunkt. Damit sollen die Fragen erledigt werden „Wann muss ich minus ..., wann mal ...“.

Deshalb sollten zugleich die anderen beteiligten Rechenarten, nämlich Minus (die bereits geteilte Zahl wird abgezogen) und Mal (damit wird die tatsächlich geteilte Zahl ermittelt) möglichst wenig betont werden. Beim Schüler soll im Rahmen des Möglichen nicht der Eindruck vorherrschen, dass er hier immer 3 Rechenarten anwenden muss. Minus und Mal sind lediglich Hilfsmittel, die sich aus der Verfolgung der Logik des Teilens mit Rest ergeben.

In der Beispielrechnung müssen wir noch 0 : 3 rechnen. Auch das kann diskutiert werden: Angenommen, 0 geteilt durch „geht nicht“, was viele Schüler glauben, dann könnten wir nichts rechnen und keine Ergebnisziffer notieren. Bei 450 : 3 käme heraus: 15. Das kann natürlich nicht sein, da die zehnmal so große Zahl zu dividieren ist wie bei 45 : 3 = 15. Logischer Weise muss der Quotient auch zehnmal so groß sein.

Also gilt: 0 geteilt durch eine Zahl ist immer 0. Das ist ein Rechenergebnis und muss wie immer notiert werden. 450 : 3 = 150.

©Kopf und Zahl, 1. Sonderheft zum Thema Division

5. Die Anzahl der Stellen beim Quotienten

Das Augenmerk kann bereits bei einstelligem Dividenden auf den Stellenwert gelenkt werden: Einer : Einer = Einer (das Ergebnis ist einstellig). Hier kann es aber auch sein, dass das Teilen nicht einmal 1 Mal durchgeführt werden kann, wenn nämlich der Dividend < Divisor. Dann ist das Ergebnis 0 R Dividend.

Bsp.: 6 : 7 = 0
− 0 (0 · 7)
= 6 Rest

Die Schüler sollen hier erstens verstehen, dass die 0 ein Ergebnis ist, und nicht etwa „nix". Das Phänomen, dass das Teilungsergebnis 0 ist, sollte ihnen nicht erst mitten in einer Aufgabe begegnen, sondern dies sollte gleich am Anfang anhand von einstelligen Rechnungen thematisiert werden.

Das ist das Prinzip: Jede Stelle wird einzeln geteilt, und für jedes Teilergebnis muss eine Ergebnisziffer aufgeschrieben werden.

Zweitens halten wir bezüglich der Anzahl von Stellen im Ergebnis fest:

Bei einstelligem Dividenden kann das Ergebnis keine oder eine Stelle haben.

Danach werden 2-stellige Dividenden geteilt, und hierbei ergibt sich, dass der Quotient entweder eine oder zwei Stellen hat.

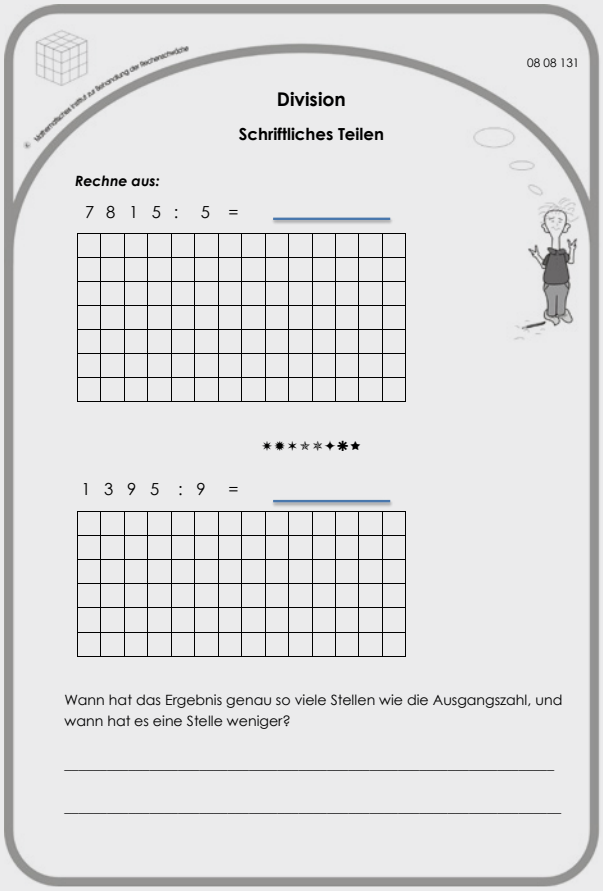
Allgemein gilt: Bei einstelligem Teiler ** hat der Quotient entweder ebenso viele Stellen wie der Dividend oder eine Stelle weniger. Das hängt davon ab, ob sich die erste Stelle teilen lässt oder nicht.

Dies ist eine Orientierungshilfe für die Schüler und erlaubt ihnen die eigene Fehlerkorrektur. Die Reflexion: „Wie viele Stellen wird das Ergebnis haben?" hilft auch, einen anderen „beliebten" Fehler zu entdecken: „Es wäre noch einmal gegangen" - der Schüler nimmt in einem Divisionsschritt nicht den größtmöglichen Quotienten:

Bsp.: 375 : 5 = 615
− 30
75
− 75
0

37 : 5 soll natürlich nicht 6 R 7 ergeben (wenngleich dieser Fehler, mathematisch betrachtet, keiner ist, sondern ein Regelverstoß). Beim schriftlichen Rech-

Weitere Übungen


08 08 131

Division

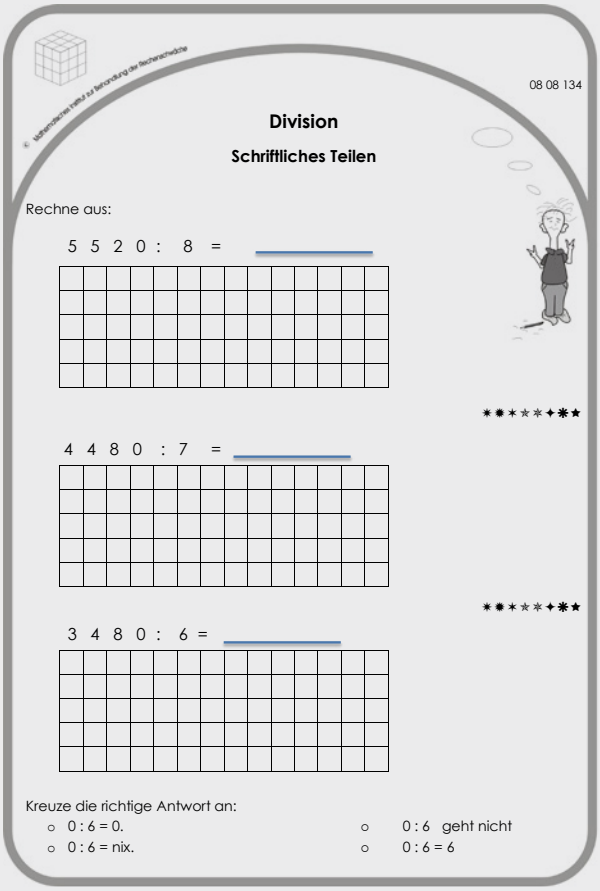
Schriftliches Teilen

Rechne aus:

7 8 1 5 : 5 =

1 3 9 5 : 9 =

Wann hat das Ergebnis genau so viele Stellen wie die Ausgangszahl, und wann hat es eine Stelle weniger?


08 08 134

Division

Schriftliches Teilen

Rechne aus:

5 5 2 0 : 8 =

4 4 8 0 : 7 =

3 4 8 0 : 6 =

Kreuze die richtige Antwort an:

- o 0 : 6 = 0.
- o 0 : 6 = nix.
- o 0 : 6 geht nicht
- o 0 : 6 = 6

nen führt das nämlich dazu, dass das Ergebnis eine Stelle zu viel hat.
Einen solchen Fehler einmal vorzuführen, stellt die Schüler vor die herausfordernde Frage: Was ist hier schief gegangen?

6. Spezialfälle

Spezialfall 1: Tauschakt schon an der ersten Stelle „Ich hole am Anfang gleich zwei Stellen runter“

Bsp.:
616 : 7 =

Weil 6H : 7 sich nicht einmal 1 Mal teilen lässt, sparen wir Zeit und Umwege, indem wir die 6H gleich tauschen in 60Z und nehmen den 1 Zehner des Dividenden dazu. Dadurch entsteht die Zahl 61 (Zehner), die durch 7 geteilt werden kann. Der Tauschakt 6H = 60Z wird durch den Bogen ausdrückt, der über die beiden ersten Ziffern geschrieben wird.

Spezialfall 2: Nullen im Dividenden „Von wegen, Null ist nichts!“

Bsp.:
90030 : 3

Vor dem Rechnen wird diskutiert, wie groß in etwa der Quotient sein muss. Eine Zehntausender-Zahl geteilt durch Einer ergibt wieder eine ZT-Zahl, wenn sich die erste Stelle teilen lässt.
Das vorstellbare falsche Ergebnis 31 kann besprochen werden als Beispiel dafür, was passiert, wenn man die „0“ nicht im Ergebnis notiert.

Wie bei allen schriftlichen Rechenverfahren ist eine gewohnheitsmäßige Größenabschätzung vor dem Ausrechnen anzustreben. Dann sind die Schüler selbst besser in der Lage, Fehler zu finden, die z. B. durch schlechtes Untereinander-Schreiben entstanden sind.

* Hier wird der Verteilgedanke angewandt: Der Teiler gibt die Anzahl der Teilgruppen an. Bei größerem Divisor wird man eher den Gedanken des Enthalten-Seins anwenden: 30 : 18 wie oft ist die 18 in der 30 enthalten.

** Dem neuen Lehrplan sei Dank müssen wir uns in der Grundschule nicht mit mehrstelligen Teilern herumschlagen.

Weitere Übungen

Zum Verständnis kann vor der Einführung der schriftlichen Division folgende Spielsituation dargestellt werden:

Material: Dezimalsystem-Material, Spielgeldscheine und -münzen (es gibt nur – wenn als Spielgeld vorhanden – Zehntausender, Tausender, Hunderter, Einer. Es ist die „Stellenwert-Bank“)

800 € verteilt auf 4 Personen

Acht 100-€-Scheine sollen 4 Personen verteilt werden. Jeder bekommt 2 Scheine. Kein Problem.

Wir schreiben auf: 800 : 4 = 200
oder: 8 H : 4 = 2 H
(Bemerkung: 2 H ist das gleiche wie 20 Z)

Nächste Situation: 4 Personen teilen sich 900 €. Es gibt neun 100-€-Scheine.
Zunächst bekommt jeder 2 Scheine, ein Schein bleibt übrig. Was nun? Durchspielen.

Einer kommt auf die Idee: Er geht zum Wechseln. Soll er alles wechseln? Nein, es ist ja gar nichts mehr da, außer der Rest: 1 H

Er kommt wieder mit 10 Zehnern. Sie werden geteilt, jeder bekommt 2 Zehner, 2 bleiben übrig. Er geht wieder und kommt mit Einern zurück.

Erkenntnis: Nichts anderes ist die schriftliche Division:

- Es wird so oft geteilt, wie Stellen vorhanden sind.
- Es wird so oft getauscht, wie Rest vorhanden ist

Gebraucht wird die schriftliche Division vor allem, wenn es um große und unübersichtliche Zahlen geht, bei denen Kopfrechnen schlecht funktioniert. Diese Aufgaben können wir mit der schriftlichen Division schrittweise rechnen. (Sie erleichtert also den Umgang mit Zahlen und erschwert ihn nicht)

Verein für Lerntherapie und Dyskalkulie e.V.

Internet:
www.dyskalkulie.de
E-Mail:
verein@dyskalkulie.de

Impressum:
Herausgeber: Verein für Lern- und Dyskalkulietherapie, München, Brienner Straße 48
Redaktion: Alexander v. Schwerin (verantwortlich), Beate Lampke, München
Christian Bussebaum, Elke Focke, Düsseldorf;
Wolfgang Hoffmann, Dortmund; Katja Rochmann, Osnabrück
Endkorrektur: Martina Schneider, Köln
Layout und Satz: Schmidt Media Design, München

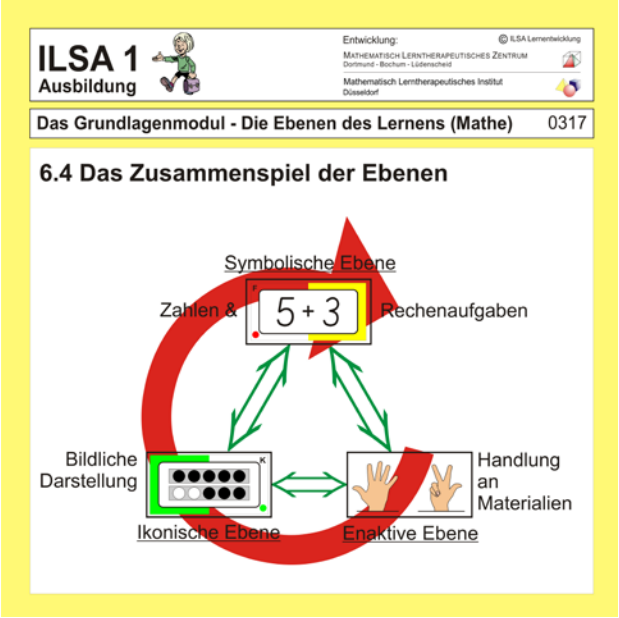
©Kopf und Zahl, 1. Sonderheft zum Thema Division

Aktuelle Informationen zu ILSA

ILSA ist ein Konzept für den Mathematikunterricht der Klasse 1 bis Anfang Klasse 2 und kann schulbuchergänzend oder schulbuchersetzend eingesetzt werden. Zudem können die Materialien im Förderunterricht bzw.

in Förderschulen klassenstufenübergreifend angewandt werden.

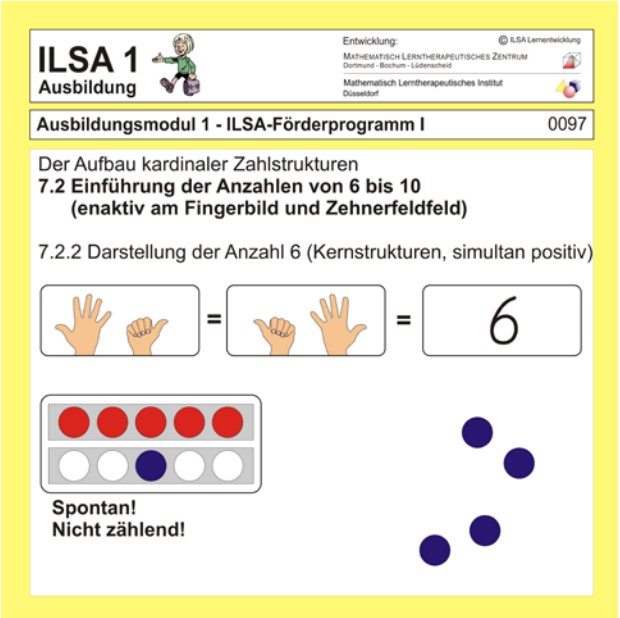
Wir empfehlen das Verwenden der ILSA-Materialien nach Besuch der ILSA-Fortbildungen, manche Darstellung in den Arbeitsheften, die allgemeine Methodik, die Anwendung der Screenings wird erst dann wirklich klar vor allem aber überblickt man erst nach den Fortbildungen die Konzeption und Praxis der ILSA.



Die ILSA-Website wird bearbeitet, sie können aber weiterhin unter

www.ILSA-Lernentwicklung.de

unter Material, „Bestellung des…“ die Materialien inklusive Arbeitshefte 1 zum Zahlenraum 10, Arbeitsheft 2 zur Erarbeitung des SWS, Arbeitshefte 3 zum Rechnen im ZR 100 inklusive Zehnerüber/unterschreitungen sichten und bestellen.



Die zukünfigen ILSA Fortbildungstermine entnehmen Sie der Rubrik „Fortbildung“.

Die ILSA Screenings wurden auch dem erweiterten Umfang der ILSA (bis zur Zehnerüber/unterschreitung im ZR 100) angepasst und sind in sich jeweils kürzer und damit in der Praxis noch handhabbarer geworden.

Sofern ergänzend zu Materialbestellungen oder Fortbildungsanmeldungen Interesse/Fragen an/zu ILSA besteht, können Sie sich gerne unter

info@ilsa-Lernentwicklung.de

melden, wir werden schnellst möglich antworten.

MLI Mathematisch-Lerntherapeutisches Institut

Institut zur Therapie der Rechenschwäche / Dyskalkulie

Förderdiagnostik – Beratung – Lerntherapie – Lehrerfortbildung

Kurfürstenstr. 8, 40211 Düsseldorf

Telefonsprechstunde:
Mo. – Fr. 11.00 – 13.00 Uhr
Tel.: 0211 – 1710667, Fax: 0211 – 1710668
E-Mail : mli@rechenschwaeche.org, Internet: www.rechenschwaeche.org

Online-Elternabend

Das MLI lädt Sie zu einem kostenlosen Zoom-Meeting ein.

Donnerstag, 16.03.2023, von 19:30 Uhr bis ca. 21:15 Uhr

zum Thema

Rechenschwäche – Was kann ich tun? Was sollte ich lieber lassen?

Dieses Treffen veranstalten wir virtuell über die Zoom-Plattform.

Eine Anmeldung ist nicht erforderlich.

So treten Sie dem Zoom-Meeting bei:
- Nur mit Ihrem Browser unter der Adresse:
zoom.us/j/94136933618 und dem Kenncode/Passwort: 416346

- Alternative: Vorab den Zoom-Client (alias Zoom-App) installieren und
sich darüber mit der Meeting-ID: 941 3693 3618 und obigem Kenncode/Passwort anmelden.

Für die folgenden Veranstaltungen ist eine Anmeldung mit Angabe der Rechnungs-E-Mail-Adresse notwendig.

Lehrerfortbildung Modul 1 online (Lehrer)

29.03.2023, 12–16 Uhr, Kosten 50 € je TL

**Rechenschwäche vermeiden, worauf muss ich im Unterricht achten?
Unterrichtskonzeption Anfangsunterricht Zählen durch Rechnen ersetzen, den ZR 10 verstehen**

Lehrerfortbildungsmodul 2 online (Lehrer)

17.05.2023, 12–16 Uhr, Kosten 50 € je TL

**Rechenschwäche vermeiden Teil 2:
Das Stellenwertsystem, Rechnen im ZR 100 Multiplikation/Division**

**Anmeldung jeweils unter mli@rechenschwaeche.org,
Sie erhalten mit der Anmeldebestätigung ihre Zugangsdaten.**

Anmeldungen nur per E-Mail an mli@rechenschwaeche.org unter Angabe ihres Namens und der Rechnungsadresse (Rechnung kommt per E-Mail nach Modul 2!).

Weitere Informationen auf Anfrage