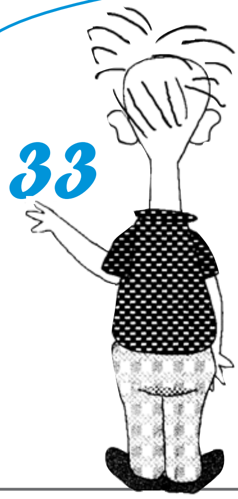
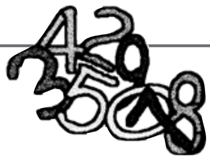


33

Kopf und Zahl

JOURNAL
des **Vereins für Lerntherapie und Dyskalkulie e.V.**
in Zusammenarbeit mit den **Mathematischen Instituten zur Behandlung der Rechenschwäche**
33. AUSGABE, Herbst 2020
www.dyskalkulie.de



„Sachaufgaben – da fang ich erst gar nicht an!“

Irene von Schwerin,
Institut zur Behandlung der Rechenschwäche, München

Die Bearbeitung von Sachaufgaben im Mathematikunterricht verlangt von den Kindern ein doppeltes Anforderungsprofil: Neben mathematischen Kompetenzen sind Fähigkeiten zum Textverständnis bzw. zur Textanalyse verlangt. Die Schüler müssen sich gleichzeitig sowohl auf der mathematischen Ebene wie auf der Sachebene gedanklich bewegen können. Zu viele Schüler haben Angst vor diesen Aufgaben, rechnen mit den Zahlen, was sie können, wenn sie denn überhaupt anfangen, oder reagieren gleich mit Verweigerung. Vielleicht werden sie nicht genügend und/oder in nicht genügend abgestuften Schwierigkeitsgraden auf diese Materie vorbereitet?

1. Welche Anforderungen stellen Sachaufgaben an die Schüler in der Grundschule:

Der in Bayern gültige Lehrplan im Fach Mathematik aus dem Jahr 2000 formuliert zum Thema Sachbezogene Mathematik für die 2. Jahrgangsstufe folgendes Lernziel:

> *„Die Schüler lernen Sachsituationen zu mathematisieren. Dabei wenden sie ihr erworbenes Wissen über Zahlen, Zahldarstellungen, Rechenoperationen und Rechenverfahren an. Sie entwickeln diese Fähigkeit anhand real gegebener, zeichnerisch dargestellter oder verbal beschriebener Situationen, in denen sie mathematische Daten oder Beziehungen entdecken. Daraus können sie neue Daten ermitteln und als Lösung darstellen.“* (KWMBI 1 So.-Nr. 1/2000 S. 102)

Eine Sachsituation zu mathematisieren heißt, die Schüler müssen beim Lösen einer Sachaufgabe der sprachlich, teilweise auch bildhaft präsentierten Situation die **quantitativen** Bezüge der Dinge entnehmen, die im Text vorkommen. Dieser Wechsel von der Sachebene zur mathematischen, quantitativen Ebene gelingt nur über die **Abstraktion** von allen konkreten Seiten der Dinge. Es ist eine Abstraktionsleistung verlangt, weil man sich vom konkreten Zusammenhang, wie er in der Sachaufgabe vorgestellt wird, zu den in ihm enthaltenen quantitativen Bezügen vorarbeiten muss und an denen weiter denken muss.

Denn es ist ja ein Problem zu lösen: Es ist in den Sachaufgaben ein Anfangszustand gegeben, ein erwünschtes, aber noch nicht erreichtes Ziel ist gekennzeichnet, und es ist drittens noch kein Weg bekannt, wie man vom Anfangszustand zum Ziel kommt. Klar ist nur: Man kommt mit einer oder mehreren mathematischen Operationen ans Ziel. Fragt sich nur mit welchen?

In der **ersten Phase** muss eine **Analyse des Textes** erfolgen mit dem Ziel, Gegebenes und Gesuchtes zu unterscheiden und damit zu erfassen, welche Daten zur Verfügung stehen, welche quantitativen Beziehungen zwischen den Daten bestehen und auch welche Informationen erst ermittelt werden müssen. Die **Frage** ist der Filter für die Unterscheidung von wichtigen und unwichtigen Angaben im Text. Sie gibt an, *welche* quantitative Seite an dem Sachzusammenhang wichtig ist.

Die quantitativen Beziehungen zwischen den gegebenen Daten in einer Skizze zu verdeutlichen oder auch in einer mathematischen Zeichenreihe auszu-

Inhalt

drücken, liefert entsprechend der **zweiten Phase** einen **Lösungsplan.** Dieser so genannte Problemlöser stellt eine Verbindung zwischen Gegebenem und Gesuchtem her. Diese Phase ist sozusagen die kreative Phase im Lösungsprozess, sobald dieses mathematische Modell steht, ist die eigentliche kreative Leistung beim Lösen des Sachproblems erbracht. (1)

In der **dritten Phase** wird der Plan ausgeführt. In der Regel werden dazu die bekannten mathematischen Verfahren angewendet, das heißt die Durchführung der mathematischen Operationen.

Die **vierte Phase** dient zum einen der Kontrolle der Ergebnisse und der Überprüfung im Hinblick auf die Problemstellung, der Einordnung der rechnerischen Lösungen in den Sachverhalt. Das heißt, das numerische Ergebnis muss erst in Beziehung zum Sach-Kontext gesetzt werden und auf Sinnhaftigkeit überprüft werden. Der Schüler muss also wieder die Denkebene wechseln: Er muss von der mathematischen Ebene zurück zur Sachebene.

Die Lösung von Sachaufgaben wird in der Literatur überwiegend

- aus kognitionspsychologischer Sicht als Problemlösen und
- aus mathematik-didaktischer Sicht als mathematische Anwendung (2)

beschrieben. Es ist jedoch weder *nur* „Problemlösen“ noch *nur* „mathematische Anwendung“. Mit Ausnahme von Phase drei müssen die Schüler ständig zwischen der mathematischen Ebene und der Sachebene wechseln. Sich *gleichzeitig* auf diesen *beiden* Denkebenen zu bewegen, stellt die große Herausforderung dar, für deren Bewältigung sowohl die mathematischen Kompetenzen als auch Problemlöse-Fähigkeiten verlangt sind.

Dieses kombinierte Anforderungsprofil zu erfüllen, ist zunächst für **jeden** Schüler eine hohe Anforderung, weil er in keiner der vier Phasen versagen darf, will er ans Ziel kommen, wobei das größte Problem in der Bewältigung von Phase zwei liegt. Nicht nur rechenschwache Kinder – diese aber fast ausnahmslos – entwickeln vor diesem Gebiet der Grundschulmathematik häufig **Ängste**, weil sie mit Auswendiglernen, eingeübten Schemata und Eselsbrücken der Sache nicht Herr werden.

2. Die genannten Anforderungen stellen Kinder mit Dyskalkulie vor besondere Schwierigkeiten

in mathematischer Hinsicht

- „Rechenschwäche“ bedeutet in der Regel ein Zahlverständnis, das nicht Mengen-orientiert ist: Zahlen werden nicht (oder nicht vorrangig) als Anzahlen, nicht als „Wie viel“ gedacht, sondern als Punkte in einer Reihenfolge. „36“ ist nicht als „6 Einer und 3 Zehner“ im Bewusstsein, sondern als Hausnummer 36 oder als der 36. Kreis auf der Hundertertafel. Zahlen werden deshalb auch nicht als zusammengebaut aus anderen Zahlen verstanden: z. B. 9 Einer aus 5 Einer und 4 Einer, oder 6 Einer und 3 Einer.
- Auf dieser Grundlage können auch Rechenarten, wie Addition und Subtraktion, gar nicht als Zuwachs bzw. Verminderung der Ausgangsmenge wahrgenommen werden, sondern allenfalls als Vorwärts- bzw. als Rückwärtsgehen auf einer Zahlenreihe. Über Multiplikation und Division sagen rechenschwache Kinder häufig: „Das sind die Rechnungen mit dem Punkt in der Mitte, und die mit den zwei Punkten in der Mitte, die kann ich gar nicht“. Wie soll ein Kind mit so einem Operationsverständnis erkennen, welche Rechenart die zu lösende Sachaufgabe verlangt? Dafür ist gerade unabdingbare Voraussetzung, dass die Schüler jede einzelne Rechenart ihrem logischen Gehalt nach verstanden haben, und dass sie den mathematischen Zusammenhang der vier Grundrechenarten zueinander durchblicken. Jede einzelne Rechenoperation richtig durchführen zu können ist zwar wichtig, hier aber nicht ausreichend.

in psychischer Hinsicht

Weil rechenschwache Kinder die Grundrechenarten gar nicht als das verstehen, was sie sind, sind sie chancenlos, wenn sie textlich gegebenen Sachzusammenhängen die entsprechende mathematische Operation entnehmen sollen. Jedenfalls können sie die Entscheidung für die jeweilige Rechenart nicht nach sachlogischen Kriterien treffen. Und am Resultat ist gar nicht mehr unterscheidbar, ob es an mangelnden **Problemlöse-Fähigkeiten** oder an mangelnden **mathematischen Kompetenzen** liegt, wenn Sachaufgaben falsch oder nicht behandelt werden. Die betroffenen Kinder können ersteres nicht unter Beweis stellen, wenn sie über letzteres nur unzureichend oder gar nicht verfügen. Die Konsequenzen sind für sie insofern fatal, weil ihnen in der Regel dann ***beide Fähigkeiten*** abgesprochen werden. Nicht selten wird am Lösen von Sachaufgaben immer noch der Grad der Intelligenz des Kindes festgemacht. Kein Wunder also, wenn vielen Kindern gerade dieses Gebiet der Mathematik als der „Gipfel des Grauens“ erscheint.

Was also tun, wenn man einerseits chancenlos ist, andererseits der Aufgabe nicht entkommt? Da gibt es zweifelsohne verschiedene Weisen, damit umzugehen:

- Sehr verbreitet: Gar nicht erst anfangen!
- Ein Ergebnis muss her, also probier’ ich halt irgendwas: „Die Klasse 3a möchte ein Klassenfest feiern. In der Klasse sind 18 Kinder“ (3). Rechnung: „18 + 3 = 21“. Antwort: „21 Kinder kommen zum Fest.“

- Man klopft das Zahlenmaterial nach Kriterien der Wahrscheinlichkeit ab: „Zurzeit rechnen wir mal, also muss ich hier auch mal rechnen."
- Man versucht, sich bestimmte *Aufgabentypen* mit Hilfe von Signalwörtern zu merken: „Wenn Uhrzeiten vorkommen, muss ich immer mal 60 rechnen."

Gerade das zuletzt genannte Verfahren wird von vielen verzweifelten Eltern gewählt, wenn sie mit ihren Kindern Kombinationsmuster von „typischen Formulierungen und bestimmten Rechenoperationen" einüben. Gerade diese Variante kann sogar eine Zeitlang immer wieder zum Erfolg führen – vor allem dann, wenn die von der Schule geforderten Sachaufgaben entsprechend „berechenbar" und „schematisch" sind. Das Problem dabei ist nur, dass es eben „strukturkonforme und strukturdekonforme" (4) Signalwörter gibt. Und noch viel wichtiger: Eine Förderung der Problemlöse-Fähigkeiten gepaart mit mathematischen Kompetenzen kommt so nicht zustande.

3. Vorschläge für die Einführung von Sachaufgaben im Mathematikunterricht

Worauf hier aus Platzgründen nicht eingegangen werden kann, ist der Unterschied zwischen „Sach-" und „Textaufgaben". Unsere Vorschläge zur Einführung von Sachaufgaben beziehen sich gleichermaßen auf Text- wie auf Sachaufgaben. Selbstverständlich sollte sein – darin sind sich wohl alle Fachdidaktiker einig – dass Sach- wie Textaufgaben einen Bezug zur Lebenswelt der Kinder haben. Es sollte darum gehen, den Kindern mit den Mitteln der Mathematik Wege zum Lösen realer Probleme zu erschließen – und nicht um das „Einkleiden" von Rechenoperationen in der kindlichen Erlebniswelt fremde Fragestellungen, die Begriffe enthalten, die die Kinder in der 3. oder 4. Jahrgangsstufe noch gar nicht verstehen können, wie z. B. „zulässiges Gesamtgewicht" oder „monatliche Rate". Um den Kindern von Anfang an ein besseres Rüstzeug für die Bearbeitung von Sachaufgaben zu geben, sollte man erst mal jede einzelne „Phase" (Siehe Punkt 1) für sich als Lernziel behandeln und sicherstellen.

Förderung des Textverständnisses als eigenes Lernziel im Mathematikunterricht

Sofern Sachaufgaben als Text präsentiert werden, muss eben auch der mathematisch-orientierte, analytische Umgang mit Texten Inhalt gezielter „Trainingseinheiten" sein. Unerlässliche „Spielregel" für diese Einheiten: „Du sollst nicht rechnen!" Damit soll der Blick des Schülers auf den *Kontext*, in dem die Zahlen vorkommen, gelenkt werden, um zu verhindern, dass mit den Zahlen *etwas* gerechnet wird, unabhängig vom Zusammenhang, in dem sie stehen. Es werden Texte untersucht – aber es geht gerade nicht darum, die „passende Rechenart zu finden". Gerade auch um die Bereitschaft für einen solchen, „nicht auf die Lösung fixierten" Umgang mit Texten zu wecken, empfiehlt sich der gezielter Einsatz von sog. „Kapitänsaufgaben".

Zum Beispiel:

Auf diesem Blatt brauchst Du nicht zu rechnen. Kreuze nur die Geschichten an, die Rechenaufgaben sind, bei denen man etwas ausrechnen kann.

❍ *Maria ist jünger als ihr neunjähriger Bruder.*

❍ *Die Franks wohnen im 5. Stock des Hauses Nr. 45 in der Bayerstraße.*

❍ *Eine Brezel kostet 60 Cent.*
Wie viel kosten 4 Brezeln?

❍ *Hans ist 4 Jahre älter als sein achtjähriger Bruder.*

❍ *4 Semmeln und ein Brot kosten zusammen 5 € 50 Cent.*

❍ *Frau Rübe kauft ein: für 12 € Käse,*
für 13 € 50 Cent Wurst.
Sie gibt einen 50-€-Schein.
Wie viel Geld bekommt sie zurück?

❍ *Katrin gibt auf dem Markt für Gemüse 5 € 60 Cent und für Obst 3 € 70 Cent aus.*
Wie viel Geld bekommt sie zurück?

❍ *Kapitän Harmson fährt auf einem 42 m langen und 12 m breiten Schiff zur See.*
Wie schnell ist sein Schiff?

Absichern des Operationsverständnisses der vier Grundrechenarten in allen Aspekten

Grundvoraussetzung dafür, dass ein Kind Sachaufgaben verstehen kann, ist ein Operationsverständnis der vier Grundrechenarten in allen ihren Aspekten. Dieses Operationsverständnis erlangen Kinder z. B. dadurch, dass sie eine Additions- bzw. Subtraktionsrechnung mit Steckwürfeln nachbilden. Und umgekehrt: Die Kinder sollen von einem Würfelbild auf die so abgebildete Rechnung schließen können. Gerade auch dann, wenn beispielsweise die Einmaleins-Reihen auswendig gekonnt werden, sollte man Wert darauf legen, dass die Kinder z. B. $5 \cdot 4 = 20$ mit Würfeln darstellen können. Gerade auch bei der Division muss das Verständnis dieser Rechenart durch den handelnden Nachvollzug sicher gestellt werden. Bei Kindern, die sich in unserer Einrichtung vorstellen, ist auffällig, dass Dividend und Divisor häufig vertauscht werden bei gleichem Quotienten, was zeigt, dass bei diesen Kindern keinerlei Verständnis über das Verhältnis von Dividend und Divisor vorliegt. Das „Enthaltensein" muss als Aspekt des Dividierens verstanden werden. Wie gesagt: Ohne dass die Kinder die vier Grundrechenarten auch in ihrem logischen Zusammenhang begreifen, werden sie nicht in der Lage sein, eine Sachaufgabenstellung in die richtige mathematische Operation zu übersetzen. Erst wenn das gesichert ist, kann man es an einfachen Sachaufgaben anwenden.

Umsetzung von zunächst nur *einschrittigen* Sachaufgaben

Das Problem an den Aufgabenstellungen in den Schulbüchern und auch häufig im Unterricht ist, dass sie in der Phase, wo man die Kinder erst an die Bearbeitung von Sachaufgaben heranführen will, schon mehr als einen Rechenschritt verlangen und damit viele Kinder heillos überfordern. Die auf jeder Stufe des Mathematikunterrichts neu erworbenen Fähigkeiten im Umgang mit Zahlen befähigen schließlich jeweils auch zur Lösung von zuvor nicht lösbaren Fragestellungen des täglichen Lebens; ihr Einsatz dafür kann frühzeitig gelernt werden! Minimalanforderung ist dabei, mathematische Probleme zu lösen, die genau einen Rechenschritt verlangen. Dabei sollte beachtet werden:

Die Sachaufgaben mit den notwendigen Rechenoperationen sollten von Anfang an konsequent gemischt werden, etwa von Plus- und Malaufgaben (sobald beide Operationen jeweils für sich erarbeitet wurden) – anstelle des in Schulbüchern häufigen „Wir haben gerade das Multiplizieren gelernt, jetzt kommen dazu die Sachaufgaben!“ Nur so vermeidet man die Entstehung des sog. *Schematischen Rechners*, der sich unabhängig vom Text für die Rechenart entscheidet, die in der Schule gerade dran ist.

Kinder sollten auch immer wieder angeregt werden, selbst (zunächst eben einschrittige) Sachaufgaben zu einer vorgegebenen Rechnung zu finden, als Beispiele, wo „im wirklichen Leben“ eine bestimmte Art des Rechnens notwendig ist.

Die nächst höhere Schwierigkeitsstufe besteht darin, zu einem offenen Text sinnvolle Fragen zu finden. Zum Beispiel:

Kreuze die Frage an, die hier sinnvoll gestellt werden kann! Du brauchst nicht zu rechnen.

Martin kauft sich ein Fahrrad für 280 €. Die Hälfte des Preises zahlt er sofort, den Rest will er in Raten von je 35 € abbezahlen.

❍ *Wie viel Geld hat Martin übrig?*

❍ *Wie viele Gänge hat das Fahrrad?*

❍ *Wie viele Raten muss Martin bezahlen?*

❍ *Wie viel Geld bekommt Martin zurück?*

Verschiedene Angaben sind im Text, was könnte man daraus berechnen? Ein Kind, das solche Fragen nicht formulieren kann, wird nicht in der Lage sein, die Frage als Filter für die Unterscheidung von wichtigen und unwichtigen Angaben im Text zu erkennen. Ein Vorschlag:

Lies die folgenden Sachaufgaben durch und unterstreiche zuerst die Frage mit einem grünen Stift.

Dann unterstreiche die wichtigen Zahlen und Größen mit einem blauen Stift.

Robert hat sich in der Bücherei 2 Bücher ausgeliehen. Er braucht 7 Tage, um sie zu lesen. Gabi hat sich 4 Bücher ausgeliehen. Sie braucht 9 Tage, um sie auszulesen.

Wer braucht mehr Zeit, um die Bücher zu lesen?

Robert hat sich in der Bücherei 2 Bücher ausgeliehen. Er braucht 7 Tage, um sie zu lesen. Gabi hat sich 4 Bücher ausgeliehen. Sie braucht 9 Tage, um sie auszulesen.

Wer hat mehr Bücher ausgeliehen?

Systematische Erarbeitung der Lösungs-Kompetenz

Das Erfassen des Textes ist zwar die unverzichtbare Voraussetzung dafür, das darin formulierte mathematische Problem zu lösen. Aber jetzt geht sozusagen die eigentlich mathematische Arbeit erst richtig los. Und es wird wohl so sein, dass diese „Fähigkeit zum Problemlösen“ auch bei bestem Unterricht nicht bei allen Kindern im selben Maße heranreifen wird. Doch was alle Kinder mit Sicherheit lernen können, sind Strategien im selbständigen Umgang mit mathematischen Problemstellungen – Strategien, die jedenfalls die Chance erhöhen, dass der kindliche Verstand auch in der Bearbeitung von Textaufgaben wirklich das leistet, was er eben individuell zu leisten imstande ist.

Die Schwierigkeit einer Sachaufgabe hängt nicht nur, aber auch davon ab, ob das Problem in einem, zwei oder mehreren Schritten gelöst werden kann. Diese Schwierigkeitsstufen sollten also auch bei der Erarbeitung der Problemlösungskompetenz beachtet werden.

Wie bereits angedeutet: Zweischrittige Aufgaben können nur gelöst werden, wenn (vor der eigentlichen, im Text gestellten Frage) eine Zwischenfrage beantwortet wird. Diese Zwischenfrage kann anfangs vorgegeben werden. In der weiteren Folge ist aber gerade darauf hinzuarbeiten, dass Kinder die im Text enthaltenen Informationen daraufhin untersuchen, welche Fragen damit unmittelbar beantwortet werden können.

Nach jedem Rechenschritt sollte nicht bloß eine Zahl als Ergebnis festgehalten, sondern überlegt und in Kurzform aufgeschrieben werden, was da jetzt eigentlich ausgerechnet wurde („Zwischenantwort“).

Bei mehrschrittigen Aufgaben sollten die Kinder sich eine „Vollständigkeits-Überprüfung“ zur Gewohnheit machen: „Habe ich mit dem letzten Rechenschritt auch wirklich das ausgerechnet, was ich wissen wollte, bzw. was gefragt ist?“

Am Ende muss eine Antwort formuliert werden, wobei die Kinder darauf achten müssen, dass ihre Antwort auch eine auf die Fragestellung der Aufgabe bezogene ist. Zu empfehlen sind Übungen wie die folgende:

> ***Hier ist die Frage immer vorgegeben. Entscheide Du, welcher Antwortsatz auf diese Frage passt. Manchmal können es mehrere sein.***
>
> ***Frage: Wie viel Geld bekommt Petra zurück?***
>
> ❍ *Sie muss 3 € 75 Cent bezahlen.*
>
> ❍ *Die Sachen kosten zusammen 3 € und 75 Cent.*
>
> ❍ *Sie bekommt 3 € 75 Cent zurück.*
>
> ❍ *Das Rückgeld beträgt 3 € 75 Cent.*
>
> ❍ *Sie hat 3 € 75 Cent hingegeben.*

Wenn ein Kind den Text versteht, wenn die Problemstellung der Lebenswelt des Kindes angemessen ist, wenn es ein umfassendes Verständnis der Rechenoperationen mitbringt und wenn es darüber hinaus über Strategien der Problemlösung verfügt, dann sollten die Sachaufgaben für die Kinder ihren Schrecken verlieren. Anregungen, in die eine oder andere Richtung zu überlegen und aufmunternde Worte leisten einen zusätzlichen Beitrag, um die Angst abzubauen.

Verwendete Literatur:

Aster, Michael von/Lorenz, Jens Holger, Rechenstörungen bei Kindern, Göttingen 2005.

Franke, Marianne, Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule, Berlin 2003 (1)vgl. S. 80, (2) ebenda, S. 21 (3) S. 103 (4) S. 109.

Fritz, Annemarie/ Ricken, Gabi/ Schmidt, Siegbert, Handbuch Rechenschwäche: Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie. Beltz – Verlag, Ausgabe - 11. März 2009.

Gaidoschik, Michael, Rechenschwäche - Dyskalkulie: Eine unterrichtspraktische Einführung für LehrerInnen und Eltern. Persen – Verlag, 2008.

Hoffmann, W. / Schlee, U. / Schwerin, A. v., „Mein Kind ist rechenschwach!“ Ratgeber für den Umgang mit rechenschwachen Kindern und Jugendlichen. Dortmund / München 1993, Eigenverlag, Direktvertrieb durch viele Dyskalkulietherapie-Institute.

Radatz, H., Schülervorstellung von Zahlen und elementaren Rechenoperationen, in: Beiträge zum Mathematikunterricht. Bad Salzdetfurth 1989.

Schulte-Körne, Gerd, Legasthenie und Dyskalkulie, Hrsg. Bochum 2007

Schwerin, Alexander von, Mein Kind kann nicht rechnen. Hilfen gegen Rechenschwäche. München 2003.

Der Artikel ist zuerst erschienen in: Sache Wort Zahl, Heft 112/38. Jahrgang, September 2010, S. 24ff

$\square - 3 = 7$ Immer Ärger mit den „Kästchenaufgaben“!

Was diese Aufgaben bei Schülern so verhasst macht – und was man daraus über das Verständnis der Kinder lernen kann.

Dr. Michael Wehrmann
(Institut für Mathematisches Lernen, Braunschweig)

Eines können rechenschwache Kinder gar nicht leiden – und das sind die sog. „Lückenaufgaben“. Der offizielle Name in Didaktik-Werken lautet hierfür „Gleichungen mit Platzhaltern“ und dieser Name gibt einen ersten Hinweis darauf, dass man hier nicht einfach drauflos rechnen kann, sondern ein gewisses Gleichungsverständnis benötigt. Wir am Institut verwenden einen noch deutlicheren Namen und nennen sie „analytische Aufgaben“, da ohne Analyse der Gleichung eine sinnvolle Bearbeitung gar nicht geht.

„Immer vom Größeren abziehen“

Carolin ist in der zweiten Klasse und ihr Kopf ist voller Regeln. Sie sieht „$\square - 3 = 7$“ und überlegt, was sie hier rechnen muss. Das ist für sie nicht schwer zu ermitteln, denn es steht ja ein Minuszeichen da und deshalb ist für sie entschieden, dass man hier „minus machen“ muss. Die Reihenfolge der Zahlen in der Gleichung lässt sie kurz inne halten – doch dann hat sie schon die passende Regel parat: „Ich darf immer nur ‚große Zahl‘ minus ‚kleine Zahl‘ rechnen!“, verkündet sie. „Also sieben minus drei. Und das ist…“ – sie blickt kurz auf ihre Finger – „…vier!“. Sie notiert eine „4“ im Kästchen und ist sich ganz sicher, richtig gerechnet zu haben – dass auf dem Papier die falsche Gleichung „$\boxed{4} - 3 = 7$“ steht, löst bei ihr keinen Widerspruch aus. Als ich sie anschließend bitte, die Rechnung noch einmal vorzulesen, liest sie nicht gemäß der lateinischen Schreibrichtung vor, sondern wiederholt lediglich ihre Rechnung: „Sieben minus drei ist gleich vier.“

Hier wird deutlich, dass Carolin das Ganze nicht als eine Gleichung wahrnimmt, in welcher der Minuend fehlt. Jeglichen Aufgabenstellungen – seien es nun „normale“ Additions- und Subtraktionsaufgaben oder werden sie als Platzhalter- bzw. Sachaufgaben dargeboten – entnimmt sie die reinen Zahlangaben und versucht, sie mit einer Rechenoperation zu verknüpfen.

Wichtig ist bei der qualitativen Diagnose, dass Carolin die Rechenart überhaupt nicht über eine Analyse der vorliegenden Gleichung ermitteln kann. Stattdessen löst sie schlicht das Rechenzeichen aus dem Kontext der Gleichung und verwendet es als Rechenvorschrift.

Aufgaben wie 4 + 3 oder 10 – 3 sind für Carolin keine Hürde, denn hier führt die Übersetzung des Operationszeichens in eine Zähl- bzw. Rechenrichtung durchaus zur richtigen Lösung. Ganz anders sieht die Situation bei analytischen Aufgaben aus, zu denen die Platzhalteraufgaben und die verbal beschriebenen Sachsituationen gehören, hier treten auf einmal ganz erhebliche Schwierigkeiten auf. Bei Sachaufgaben gelingt es ihr nicht, die beschriebene quantitative Veränderung in die zugehörige arithmetische Operation zu übertragen. Da hier keine explizite Rechenart angegeben ist, ist sie bei Texten weitaus hilfloser und darauf angewiesen, bestimmte Schlüsselworte zu entdecken, um überhaupt rechnen zu können. „Bei Geld muss man ‚plus' machen!", lautet eine weitere von Carolins Regeln.

Dies führt dazu, dass sie zur Sachaufgabe „Ein Mädchen hat zehn Euro und kauft eine Puppe für vier Euro" im Kopf 10 + 4 rechnet und konsequent den Antwortsatz „Das Mädchen bekommt 14 Euro Rückgeld." aufschreibt.

Die weitere Analyse ergibt, dass bei ihr eine wesentliche Voraussetzung zur verständigen Lösung von solchen Aufgaben gar nicht entwickelt ist: Carolin weiß bislang nichts über die Rolle der Operanden in einer Rechnung. In ihrer subjektiven Vorstellung gibt es immer eine „Startzahl", bei der es losgeht, die zweite Zahl sagt ihr, „wie weit" es geht (sie bestimmt, nebenbei bemerkt, jedes Ergebnis zählend). Ein Konzept wie Gesamtmenge/Teilmenge (die Interpretation der Gleichung als Verhältnis von Teil-Teil-Ganzes) hat sie bislang nicht ausgebildet. Sie weiß z. B. nicht, dass der Minuend die Gesamtanzahl angibt, von der etwas weg genommen wird – deshalb kann sie die obige Gleichung auch nicht inhaltlich erfassen. Resultat unserer diagnostischen Sitzung: Das operationale Verständnis der Grundrechenarten ist bei ihr nicht einmal im Ansatz ausgebildet.

„Ich muss das andere nehmen…"

Jan aus der dritten Klasse ist da einen Schritt weiter. Nicht unbedingt im Verständnis, aber immerhin hinsichtlich der Trefferquote… Auch ihm lege ich „$\square$ – 3 = 7" vor und bekomme die zunächst verblüffende Antwort: „Ach ja, das mit den Kästchen kenn' ich.

Das sind die Reinleger-Aufgaben!" – „Reinleger-Aufgaben?", frage ich erstaunt nach. „Ja", sagt er, „da muss man immer das andere nehmen!" So ganz hatte ich ihn noch nicht verstanden, doch klärte er mich gleich auf: „Da steht zwar ‚minus' – aber das stimmt gar nicht! Man muss hier das andere nehmen, also ‚plus' machen. Drei plus sieben gibt zehn. Zehn kommt da rein!" Und er schreibt „$\boxed{10}$ – 3 = 7" auf das Papier. Auf meine Frage, warum das so sei, antwortet Jan ehrlich: „Keine Ahnung, aber das ist eben so! Hat sich einer mal ausgedacht."

Mathematik besteht in Jans Vorstellung aus jeder Menge Fallen, welche die Lehrer aufstellen, um die Kinder „reinzulegen". Nur die ganz Pfiffigen – und dazu zählt er sich – kennen die ganzen Tricks und Kniffe, ihnen zu entgehen. Er hat keinerlei Vorstellung davon, warum man „das andere" nehmen muss. Mit „Reinleger-Aufgaben" drückt er ja gerade mit seinen Worten aus, dass es da inhaltlich aus der Sache heraus nichts zu begreifen gibt. Die qualitative Analyse ergibt bei Jan ein ähnliches Ergebnis wie bei Carolin – auch wenn seine Ergebnisse formal oft richtig sind.

Täuschend ist nun bei Jan, dass er jüngst eine Klassenarbeit mit eben diesen Platzhalteraufgaben erstaunlich gut gemeistert hat – wenngleich er bei einigen Aufgaben mit seinen Lösungsvorschlägen deutlich daneben lag (so notierte er z. B. „7 – $\boxed{10}$ = 3"). Er erhielt anhand seiner erzielten Punkte ein „gut" und die Lehrerin war daraufhin (fälschlicherweise) der Auffassung, dass er die Logik dieser Aufgaben im Großen und Ganzen verstanden habe. Sie staunt nicht schlecht, als ich ihr in der Fallbesprechung bei uns am Institut von Jans „Anti-Reinlege"-Strategie erzähle. In diesem Gespräch ermitteln wir auch, wie viele richtige Treffer man – völlig ohne Verständnis – mit dieser Technik erzielen kann. Es gibt vier Varianten: plus und minus und jeweils der erste oder der zweite Operand wird gesucht. In drei von vier Fällen benötigt man tatsächlich die Umkehrung („das andere") für die Lösung. Dies erklärt Jans Note „gut". Doch „gut" im Wortsinn ist Jans rechenoperationales Verständnis bei weitem nicht.

„…außer ‚minus' mit Lücke hinten"

Bis vor kurzem war ich der Auffassung, dass 75 % wohl die beste Trefferquote ist, die man mit einem inhaltsleeren Schematismus bei Gleichungen mit Platzhaltern erzielen kann. Doch ich wurde eines Besseren belehrt. Mandy aus der vierten Klasse teilt mir ihre Merkregel mit: „Bei dieser Sorte Aufgaben wählt man die entgegengesetzte Rechenart – außer bei ‚minus' mit Lücke hinten!" Ich bin sprachlos. Zum einen über den riesigen Regelwust, der sich in dreieinhalb Schuljahren bei Mandy angesammelt hat. Zum anderen über die immense Anstrengung, die damit verbunden ist, sich das alles zu merken. Und sie hat wirklich für alles eine Regel parat: für das „Häuserrechnen", für den „Überschlag" (für sie auch eine „Rechenart"), für das „Schrägrechnen" (sie meint die schriftliche Division) und so weiter und so fort. Ich frage sie auch, wie viele Rechenarten es denn gäbe. Ihre Antwort verblüfft mich immer noch: „Ach bestimmt hundert oder so. Wir machen ja jeden Tag eine neue!"

Ich höre gelegentlich, dass Gedächtnisprobleme eine Ursache für Rechenschwäche wären – doch an Mandy kann man studieren, dass das Verhältnis in Wirklichkeit ein anderes ist. Mit einem fundiertem Verständnis muss man sich in Mathematik nur recht wenig auswendig merken. Für rechenschwache Kinder ist dies allerdings anders: Sie versuchen alles und jedes auswendig zu lernen und würzen es mit einer Prise eigener Regeln. Bei solchen Kindern wirken sich dann Gedächtnisprobleme ganz erheblich aus.

Ein wenig Algebra schon in der ersten Klasse

In unserer Lerntherapie machen wir demzufolge mit Kindern wie Mandy kein isoliertes Gedächtnistraining, sondern erarbeiten stattdessen den mathematischen Sachverhalt neu. Und da kommt man um eine kleine Portion Algebra nicht herum. „Algebra“ heißt nichts anderes als „Gleichungsrechnen“ und damit ist gemeint, dass man sich mit dem Schüler in die Logik des Umgangs mit Gleichungen einarbeiten muss – auch wenn explizite Umformungen von Gleichungen der Sekundarstufe I vorbehalten sind.

Übertragen wir einmal die Gleichung „$\square - 3 = 7$“ in Worte: „Da ist eine Zahl gesucht, diese kommt später in das Kästchen. Von dieser Zahl nehme ich drei weg. Dann ist es gleich viel wie sieben.“ Dies zu formulieren unterstellt eine ganze Menge mathematischer Kenntnisse, die vom Schüler erarbeitet sein müssen. Es fängt damit an, dass man eine Rechnung strikt in lateinischer Schreibrichtung liest. Der wichtigste Punkt dabei ist sicherlich, dass das Operationsverständnis voll ausgebildet sein muss. Insbesondere die Rolle der Operanden (Minuend = Gesamtanzahl, Subtrahend = wegzunehmender Teil, Wert der Differenz = der Teil, der übrig bleibt) muss dem Schüler klar sein.

Ebenso wichtig ist ein Verständnis der Vergleichszeichen „<“, „>“ und „=“. Hiermit werden Anzahlen verglichen, was für viele Kinder ganz neu ist. In manchen Büchern lese ich: „Das Krokodil frisst immer die größere Zahl!“. Einer solchen „Erklärung“ stehe ich skeptisch gegenüber, da sich diese Eselsbrücke nicht aus der mathematischen Logik speist, sondern sich ausschließlich dem Wunsch nach einem kindgemäßen Bild verdankt. Was ist eigentlich, wenn das Reptil nur einen kleinen Hunger hat? (Neulich wurde mir beim Vorlesen der mathematischen Aussage „$7 > 4$“ von einem Kind gar vorgetragen: „Sieben Krokodilmaul vier“.) Ich bevorzuge stattdessen eine Erklärung, die auf die Entstehung des Symbols Bezug nimmt: „Auf derjenigen Seite, auf der das Zeichen größer ist, steht auch die größere Zahl.“ Auf diese Weise bekommt man auch einen eleganten Übergang zum „ist gleich“ hin: dieses Zeichen ist auf beiden Seiten gleich weit geöffnet.

Man darf sich nun nicht davon täuschen lassen, dass den Schülern der Name „ist gleich“ zumeist bekannt ist. Fragen Sie einmal nach, was die Kinder mit dem Gleichheitszeichen in ihrer Vorstellung verbinden. Auf die Frage, was dieses Zeichen bedeute, antwortet Mandy z. B. „Dahinter steht das Ergebnis!“ Für sie ist es also eine Art Positionsbestimmung, daher erscheint es ihr korrekt, an anderer Stelle zu schreiben: „$7+3=10+5=15$“. Jan antwortet auf dieselbe Frage übrigens „Da muss man rechnen!“ Für ihn hat das Gleichheitszeichen offensichtlich den strengen Charakter eines Befehlszeichens.

Erst wenn diese arithmetischen Inhalte – die Bedeutung der Rechenarten, ihr inverser Zusammenhang (Umkehrung), die logische Stellung der einzelnen Operanden und der Inhalt der Vergleichssymbole – erarbeitet sind, kann man den analytischen Schritt zur Lösung durchführen: „Um die Ausgangszahl zu bekommen, muss ich mir drei zu sieben wieder dazu denken.“

Muss man das wirklich können?

Ich höre mitunter, Gleichungen mit Platzhaltern wären „(zu) schwierig“ für Grundschüler, gelegentlich gipfelt dies gar in der Forderung, diese Aufgaben aus dem Curriculum ganz zu verbannen. Dem möchte ich entgegenhalten, dass ich diese Sorte Aufgaben für sehr wichtig, ja sogar für unverzichtbar halte. Die Bewältigung dieser Gleichungen ist ein guter Test, ob die Logik der Rechenoperationen wirklich verständig verinnerlicht ist. Schüler, die an den Platzhalteraufgaben scheitern, haben in den allermeisten Fällen kein ausgebildetes Operationsverständnis – auch wenn sie beim „normalen Rechnen“ durchaus richtige Ergebnisse erzielen können. Deshalb kommt der verständigen Bewältigung der analytischen Aufgaben in unserer Lerntherapie eine besondere Bedeutung zu. Erst wenn diese Aufgabentypen erfasst und über die operationalen Zusammenhänge Umkehrung und Tausch gelöst werden können, ist die Erarbeitung der ersten beiden Grundrechenarten wirklich abgeschlossen – und dann haben unsere Schüler auch das nötige Rüstzeug, den Zehnerübergang in Angriff nehmen zu können.

Verein für Lerntherapie und Dyskalkulie e.V.

Internet:
www.dyskalkulie.de
E-Mail:
verein@dyskalkulie.de

Impressum:
Herausgeber: Verein für Lern- und Dyskalkulietherapie, München, Brienner Straße 48
Redaktion: Alexander v. Schwerin (verantwortlich), Beate Lampke, München
Christian Bussebaum, Elke Focke, Düsseldorf;
Wolfgang Hoffmann, Dortmund; Katja Rochmann, Osnabrück
Layout und Satz: Schmidt Media Design, München

MLI Mathematisch-Lerntherapeutisches Institut
Institut zur Therapie der Rechenschwäche / Dyskalkulie

Förderdiagnostik – Beratung – Lerntherapie – Lehrerfortbildung

Kurfürstenstr. 8, 40211 Düsseldorf

Telefonsprechstunde:
Mo. – Fr. 11.00 – 13.00 Uhr
Tel.: 0211 – 1710667, Fax: 0211 – 1710668
E-Mail : mli@rechenschwaeche.org, Internet: www.rechenschwaeche.org

Elternabend zum Thema Rechenschwäche

Sehr geehrte Damen und Herren, liebe Eltern,

hiermit möchten wir Sie herzlich zu unserem kostenfreien Online-Elterninformationsabend zum Thema:

„Rechenschwäche, was kann ich tun, was sollte ich lieber lassen!“

Am Donnerstag, 03. Dezember 2020 um 19:30 Uhr einladen.

- Voraussetzung hierfür ist die Installation der ZOOM-App
- Eine Anmeldung über das MLI ist nicht erforderlich

Das Mathematisch-Lerntherapeutische Institut Düsseldorf
lädt Sie zu einem geplanten Zoom-Meeting ein:

- Zoom-Meeting beitreten:
  https://zoom.us/j/93260017493
  Meeting-ID: 932 6001 7493

Die Webinare vom Sommer zu ILSA 1 und ILSA SWS werden Anfang Februar wiederholt werden. Die Videos zur Arbeit mit ILSA sind dann auch wieder freigeschaltet. Sofern Sie Interesse haben, melden Sie sich doch unverbindlich unter ILSA@mli-duesseldorf.de an.
Wir schicken Ihnen weitere Informationen vor den Weihnachtsferien.

Weitere Informationen auf Anfrage